De uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura.
Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático
sob nº. 1 338.

Exemplar № 14905

ARY QUINTELLA

Professor Catedrático do Colégio Militar

MATEMÁTICA

para a

TERCEIRA SÉRIE GINASIAL

(Com 580 exercícios)

66.ª EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

CURSO GINASIAL:

1. *Matemática* – primeira série ginasial.
2. *Matemática* – segunda série ginasial.
3. *Matemática* – terceira série ginasial.
4. *Matemática* – quarta série ginasial.

CURSO COLEGIAL:

5. *Matemática* – primeiro ano.
6. *Matemática* – segundo ano.
7. *Matemática* – terceiro ano.

CURSO COMERCIAL BÁSICO (esgotados):

8. *Aritmética prática*, para a primeira série.
9. *Matemática*, segunda série.
10. *Álgebra Elementar*, para a terceira série.

Matemática. Curso Comercial Básico (em preparo).

CURSO DE ADMISSÃO:

11. *Exercícios de Aritmética*.

(Em colaboração com o Prof. VICTALINO ALVES)

12. *Matemática*. Questões de Concurso nas Escolas Superiores (esgotado).

ARTIGO 91:

13. *Guia de Matemática*.

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo 2, SP

*

CURSO NORMAL:

(Em colaboração com o Prof. FRANCISCO JUNQUEIRA)

14. *Exercícios de Matemática*.

ÍNDICE GERAL

UNIDADE II

GEOMETRIA PLANA

UNIDADE III

LINHAS PROPORCIONAIS. SEMELHANÇA

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

PREFÁCIO

Acreditamos deva ser uma obra didática compreendida como o resultado de uma experiência coletiva que inclua os trabalhos de classe e sua verificação, de modo a estabelecer a necessária correlação entre o que se pretendeu ensinar e aquilo que real e efetivamente resultou dessa pretensão (aprendizagem).

Nível mental e nível de ensino, no complexo do processo educativo, não devem e nem podem fugir às imposições de uma participação substancial dos recursos e tendências individuais a que o texto didático deverá se ajustar, do modo mais completo possível.

A nova edição de nosso Curso Ginasial foi projetada na base de um inquérito que realizamos entre professôres de vários pontos do país. Vem, agora, modificada, mesmo em sua estrutura, com supressões, simplificações e acréscimos que os colegas identificarão fàcilmente.

Procuramos, assim, atender às ponderações que nos foram gentilmente enviadas pelos colegas que conosco cooperaram efetivamente, aos quais registamos, aqui, nossos melhores agradecimentos e a cuja experiência no tratamento destas questões rendemos nossas homenagens.

O AUTOR

MATEMÁTICA

UNIDADE I

Razões e proporções. Aplicações aritméticas

I — RAZÕES

1. Razão de dois números — é o quociente da divisão do primeiro pelo segundo.

A razão entre 3 e 5 é 3/5.

O primeiro têrmo de uma razão denomina-se ***antecedente,*** e o segundo ***conseqüente.*** Na razão de 3 para 5 ou $\frac{3}{5}$, o antecedente é 3 e o conseqüente 5.

Quando a razão é um número inteiro, o conseqüente é a unidade.

2. Razão de duas grandezas. Se medirmos duas grandezas com a mesma unidade, os dois segmentos a e b, da figura abaixo por exemplo, com a mesma unidade u, encontraremos:

$$a = 3\,u$$
$$b = 5\,u$$

u |——| |—| u_1

a |——|——|——|

b |——|——|——|——|——|

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades, obteremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}.$$

O número $\frac{3}{5}$, que é abstrato, denomina-se *razão* dos dois segmentos a e b. Concluímos a definição:

Razão de duas grandezas da mesma espécie é o quociente da divisão dos números que exprimem suas medidas, com a mesma unidade.

Assim, para acharmos a razão entre dois estados da mesma grandeza, ou, como também dizemos, entre duas grandezas da mesma espécie, é *necessário medi-las com a **mesma unidade.***

Exemplos:

1.º) *Achar a razão entre dois segmentos de 1dm e 25cm, respectivamente.*

Reduzindo as duas medidas a cm, obtemos a razão:

$$\frac{10}{25} \text{ ou } \frac{2}{5}, \text{ que também se escreve } 2 : 5.$$

2.º) *Achar a razão de 5 in para 5 ft.*

Como o pé tem 12 polegadas, as medidas em polegadas serão, respectivamente, 5 e 60, e a razão pedida será:

$$\frac{5}{60} \text{ ou } \frac{1}{12}.$$

OBSERVAÇÃO: Se adotássemos uma nova unidade u_1, a metade de u, por exemplo, como mostra a figura da página anterior, teríamos:

$$u = 2u_1$$

e, portanto,

$$a = 3 \times 2u_1 = 6u_1$$
$$b = 5 \times 2u_1 = 10u_1.$$

Por divisão, obteríamos novamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{10} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

daí, a conclusão:

A razão de duas grandezas é independente da unidade adotada nas medidas, isto é, tem um valor fixo, qualquer que seja a unidade escolhida.

3. Propriedades das razões. As razões gozam de tôdas as propriedades das frações, e a elas são aplicáveis tôdas as regras de cálculo com as frações, já conhecidas.

II — PROPORÇÕES. MÉDIAS

4. Proporção.

Proporção é a igualdade de duas razões.

Exemplo: $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$.

Lê-se: 3 *está para* 6 *assim como* 9 *para* 18. Também se escreve: 3 : 6 :: 9 : 18

Os quatro números que figuram na proporção são denominados ***têrmos*** da proporção.

O primeiro e quarto têrmos, 3 e 18, são denominados ***extremos***. O segundo e o terceiro, 6 e 9, são ***meios***.

A designação dos têrmos é a seguinte:

$$\frac{1.º\ \text{têrmo}}{2.º\ \text{têrmo}} = \frac{3.º\ \text{têrmo}}{4.º\ \text{têrmo}} \qquad \frac{\text{extremo}}{\text{meio}} = \frac{\text{meio}}{\text{extremo}} \qquad \frac{\text{antecedente}}{\text{conseqüente}} = \frac{\text{antecedente}}{\text{conseqüente}}$$

Para escrever, de modo geral, uma proporção, representam-se os têrmos por letras:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

5. Propriedade fundamental das proporções.

Em tôda a proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Consideremos, de modo geral, a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Eliminando os denominadores:

$$ad = bc,$$

o que prova a propriedade.

Exemplo:

Seja a proporção $\frac{6}{18} = \frac{5}{15}$.

Temos: $6 \times 15 = 5 \times 18,$

ou: $90 = 90$

6. Recíproca da propriedade fundamental.

> **Quando o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, os quatro números formam proporção.**

Seja $6 \times 15 = 5 \times 18.$

Dividindo os dois membros por 15×18, temos:

$$\frac{6 \times 15}{15 \times 18} = \frac{5 \times 18}{15 \times 18}$$

ou, simplificando os fatôres iguais:

$$\frac{6}{18} = \frac{5}{15}.$$

De acôrdo com a propriedade fundamental e sua recíproca, para verificar se quatro números formam proporção, efetuamos o produto do *maior* pelo *menor* e verificamos se êsse produto é igual ao dos outros dois. Assim os quatro números 4, 10, 16 e 40 formam proporção por serem iguais os produtos 4×40 e 10×16.

7. Aplicações.

PRIMEIRA APLICAÇÃO. ***Transformações de uma proporção.***

Transformar uma proporção é mudar a posição de seus têrmos de modo que resulte ainda uma proporção. São três as transformações que se denominam: *alternar, inverter* e *transpor* a proporção.

Alternar consiste em *trocar a posição* dos meios ou dos extremos.

Seja a proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

alternando os meios: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

alternando os extremos: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$

igualdades que são também proporções, por se verificar ainda a propriedade fundamental: $3 \times 4 = 2 \times 6$.

Inverter consiste em *inverter* as razões.

Assim, da proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$,

concluímos: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$,

que é também uma proporção, por se verificar a propriedade fundamental: $3 \times 4 = 2 \times 6$.

Transpor consiste em *trocar a posição* das razões.

Assim, da proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$,

concluímos: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Utilizando estas transformações é possível escrever uma proporção de ***oito maneiras:***

	Transpondo cada uma:
Proporção dada: $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$	$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
Alternando os meios: $\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$	$\frac{8}{16} = \frac{5}{10}$
Alternando os extremos: $\frac{16}{8} = \frac{10}{5}$	$\frac{10}{5} = \frac{16}{8}$
Invertendo: $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$	$\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

SEGUNDA APLICAÇÃO. ***Cálculo de um têrmo qualquer de uma proporção.***

Por intermédio da propriedade fundamental, é sempre possível determinar um têrmo, quando são conhecidos os outros três. Exemplos:

1.º) *Achar o valor de* x *na proporção* $\frac{12}{48} = \frac{16}{x}$.

Aplicando a propriedade fundamental:

$$12x = 48 \times 16 \quad \text{ou} \quad 12x = 768$$

donde concluímos: $x = \frac{768}{12} = 64.$

2.º) *Achar o valor de* x *na proporção* $\frac{18}{24} = \frac{x}{40}$.

Aplicando a propriedade fundamental:

$$24x = 18 \times 40 \quad \text{ou} \quad 24x = 720$$

donde concluímos: $x = \frac{720}{24} = 30.$

8. Quarta proporcional. Chama-se *quarta proporcional* a três números dados, um quarto número, que forma com os mesmos uma proporção.

Exemplo:

Achar a quarta proporcional aos números 12, 16 e 48.

Representando por x o têrmo procurado, o problema admite três soluções, correspondentes às proporções:

$$\frac{12}{16} = \frac{48}{x} \qquad \frac{12}{16} = \frac{x'}{48} \qquad \frac{12}{x''} = \frac{48}{16}$$

pois, a posição do número x é arbitrária.

Daí, os três valores de x:

$$x = \frac{16 \times 48}{12} = 64, \quad x' = \frac{12 \times 48}{16} = 36, \quad x'' = \frac{12 \times 16}{48} = 4$$

Só há três soluções, porque em cada solução, o produto de um dos números dados por x, é igual ao produto dos outros dois.

Em geral, *considera-se a* ***solução obtida,*** *conservando na proporção a ordem dos* ***números dados,*** *e considerando como incógnita o* ***último têrmo.***

9. Proporção contínua. Média proporcional. Terceira. Uma proporção em que os meios ou os extremos são iguais é denominada *proporção contínua.* Assim, a proporção $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ é contínua.

Na proporção contínua, o têrmo igual é denominado ***média*** proporcional ou geométrica; e, qualquer dos dois outros, 4 ou 9, é denominado ***terceira*** proporcional. No exemplo acima, 4 é terceira proporcional entre 9 e 6, e 9 é terceira proporcional entre 4 e 6.

10. Cálculo da média e da terceira proporcionais.

Seja a proporção contínua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Aplicando a propriedade fundamental temos:

$$b^2 = ac.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos

$$b = \sqrt{ac}.$$

Conclui-se:

> **A média proporcional entre dois números é igual à raiz quadrada de seu produto.**

Exemplos:

1.º) *Achar a média proporcional entre 27 e 12.*

Representando por x a média procurada temos:

$$x = \sqrt{27 \times 12}$$

ou

$$x = \sqrt{324} \therefore x = 18.$$

2.º) *Achar a terceira proporcional a 5,6 e 0,84.*

Formando a proporção contínua, obtemos, representando por x a terceira proporcional:

$$\frac{5{,}6}{0{,}84} = \frac{0{,}84}{x} \text{ ou } \frac{0{,}84}{5{,}6} = \frac{5{,}6}{x}$$

Observemos que, se não fôr fixada a média, haverá duas soluções. Da primeira proporção, resulta:

$$x = \frac{0{,}84^2}{5{,}6} = \frac{0{,}705\,6}{5{,}6} = 0{,}126$$

e da segunda $x = \frac{5{,}6^2}{0{,}84} = 37{,}333\ldots$

Se fôr fixada prèviamente a média, só uma das soluções prevalecerá.

3.º) *Achar a terceira proporcional a 3 e 9, sendo 9 a média.*

Temos: $\frac{3}{9} = \frac{9}{x} \therefore x = \frac{9^2}{3} = 27.$

11. Propriedades das proporções. Aplicações.

PRIMEIRA.

> **A soma ou a diferença dos antecedentes está para a dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para seu conseqüente.**

Seja, de um modo geral, a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Suponhamos q o valor comum das razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q \;\ldots\ldots\; (1)$$

Daí, resulta:

$$a = bq$$
$$c = dq$$

Somando:

$$a + c = (b + d)q$$
$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = q$$

Subtraindo:

$$a - c = (b - d)q$$
$$\therefore \frac{a-c}{b-d} = q$$

Comparando com a igualdade (1):

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \qquad \boxed{\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Aplicações. Exercícios resolvidos.

PRIMEIRO. ***A diferença entre os antecedentes de uma proporção é 10 e os conseqüentes são 9 e 7. Achar os antecedentes.***

Representemos os antecedentes por x e y, e teremos a proporção:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{7}.$$

Aplicando a propriedade em relação à diferença, resulta:

$$\frac{x-y}{9-7}=\frac{x}{9}=\frac{y}{7}.$$

Como a diferença $x-y$ é igual a 10, temos as duas proporções:

$$\frac{10}{2}=\frac{x}{9} \qquad \frac{10}{2}=\frac{y}{7} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=\dfrac{10\times 9}{2}=45 \\ y=\dfrac{10\times 7}{2}=35 \end{cases}$$

Os antecedentes são, respectivamente, 45 e 35.

Segundo. ***Resolver o sistema:***

$$x+y=20$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{7}$$

Resolução. Aplicando a propriedade, vem:

$$\frac{x+y}{3+7}=\frac{x}{3}=\frac{y}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{10}=\frac{x}{3}=\frac{y}{7}.$$

Donde resulta: $x=\dfrac{60}{10}=6$ e $y=\dfrac{140}{10}=14$.

Terceiro. ***Achar dois números, cuja soma é 85 e a razão 2/3.***

Resolução. Representemos os números por x e y. A razão entre os mesmos é 2/3; logo, temos:

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}.$$

Alternando os meios: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}.$

Aplicando a propriedade:

$$\frac{x+y}{2+3} \quad \text{ou} \quad \frac{85}{5}=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}.$$

Donde: $x=\dfrac{2\times 85}{5}=34$ e $y=\dfrac{3\times 85}{5}=51.$

Quarto. ***Achar dois números cuja diferença é 13 e a razão $\frac{3}{4}$.***

Resolução. Representemos os dois números procurados por x e y. A razão sendo $\dfrac{3}{4}$, temos a proporção:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}.$$

Alternando os extremos:

$$\frac{4}{y}=\frac{3}{x}$$

Aplicando a propriedade, em relação à diferença:

$$\frac{4-3}{y-x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{13}=\frac{4}{y}=\frac{3}{x}.$$

Donde: $y=4\times 13=52$ e $x=3\times 13=39.$

Quinto. ***Achar dois números na razão 3/4, cujo produto seja 300.***

Resolução. Representemos por x e y os dois números. Teremos a proporção:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}.$$

A propriedade não se aplica; multiplicando os dois têrmos da primeira razão por x:

$$\frac{x^2}{xy}=\frac{3}{4}.$$

Como o produto é 300, vem:

$$\frac{x^2}{300} = \frac{3}{4} \therefore x^2 = 225$$

Conclui-se: $$x = \sqrt{225} = 15$$

e $$y = \frac{300}{15} = 20.$$

SEXTO. ***Achar dois números na razão de 2/3, sendo 325 a soma de seus quadrados.***

RESOLUÇÃO. Representemos por x e y os números procurados; temos, então, a proporção:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{4}{9} \text{ ou } \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9}$$

Aplicando a propriedade, resulta:

$$\frac{x^2 + y^2}{4 + 9} = \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9}.$$

Sendo a soma dos quadrados 325, concluímos:

$$\frac{325}{13} = \frac{y^2}{9} \therefore y^2 = \frac{9 \times 325}{13} = 225$$

e, portanto: $$x^2 = 100.$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos: $x = 10$ e $y = 15$.

12. Outras propriedades das proporções.

I — A soma ou diferença dos dois primeiros têrmos está para o primeiro, assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o terceiro.

II — A soma ou diferença dos dois primeiros têrmos está para o segundo assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o quarto.

III — A soma dos dois primeiros têrmos está para a sua diferença assim como a soma dos dois últimos está para sua diferença.

Essas propriedades podem ser consideradas como decorrentes da primeira com auxílio *da qual são fàcilmente justificadas.*

13. Proporção prolongada. É a sucessão de três ou mais razões iguais, como:

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16}$$

Tôdas valem 1/2.

14. Propriedade das proporções prolongadas.

Numa proporção prolongada a soma dos antecedentes está para a soma dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para seu conseqüente.

DEMONSTRAÇÃO. Seja a proporção prolongada, cujo valor comum das razões suponhamos q:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = q. \qquad (1)$$

Das igualdades resulta:

$$a = a'q$$
$$b = b'q$$
$$c = c'q$$

Somando, membro a membro, e colocando q em evidência:

$$a + b + c = (a' + b' + c') \cdot q$$

donde: $$\frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = q.$$

Finalmente, comparando o resultado com a igualdade (1):

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

APLICAÇÕES.

PRIMEIRA. ***Achar a, b, c, nas seguintes razões iguais:***

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6},$$

sabendo que a soma $a + b + c$ é igual a 26.

RESOLUÇÃO. Aplicando a propriedade da soma dos antecedentes, temos:

$$\frac{a+b+c}{3+4+6} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}.$$

Como $a+b+c=26$, resulta:

$$\frac{26}{13} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} \therefore \begin{cases} a = \dfrac{3\times 26}{13} = 6 \\ b = \dfrac{4\times 26}{13} = 8 \\ c = \dfrac{6\times 26}{13} = 12 \end{cases}.$$

SEGUNDA. ***Resolver o sistema:***

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

$$5x + 4y - 3z = 10.$$

Para que os antecedentes das razões sejam, exatamente, os têrmos da última equação, multipliquemos os dois têrmos da primeira por 5, os da segunda por 4, e os da terceira por -3, o que não as alterará, resultando:

$$\frac{5x}{30} = \frac{4y}{36} = \frac{-3z}{-36}$$

$$5x + 4y - 3z = 10.$$

Aplicando a propriedade:

$$\frac{5x}{30} = \frac{4y}{36} = \frac{-3z}{-36} = \frac{5x+4y-3z}{30+36-36}$$

ou, substituindo a soma dos antecedentes por seu valor 10, de acôrdo com a terceira equação, e simplificando as razões:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{10}{30}$$

donde, finalmente:

$$x = 2,\ y = 3 \text{ e } z = 4.$$

15. Noção geral de média. Dá-se, de um modo geral, o nome de ***valor médio*** ou ***média*** de vários números dados, a todo número formado por intermédio dos números dados e compreendido entre o maior e o menor dêles.

Assim, dados os números

5, 7, 9, 18,

qualquer número compreendido entre 5 e 18, e obtido segundo uma certa convenção, será uma *média* ou *valor médio*.

Há diversos tipos de médias a dois ou mais números dados variando de um tipo para outro o modo pelo qual se forma dos números dados.

16. Média aritmética.

> **Média aritmética entre dois ou mais números dados é o quociente da divisão da soma dêsses números pelo número de parcelas.**

Exemplos: 1.º) *A média aritmética entre 8, 9 e 16 é:*

$$M_a = \frac{8+9+16}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

2.º) *A média aritmética entre 8,64 e 7,36 é:*

$$M_a = \frac{8,64 + 7,36}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

17. Média aritmética ponderada. Em certos casos, na determinação da média, consideram-se os números dados multiplicados por fatôres constantes, denominados *pesos* dos números correspondentes; a *média* denomina-se, então, *média aritmética ponderada.*

A média aritmética ponderada obtém-se, multiplicando os números dados pelos pesos correspondentes e dividindo a soma dos produtos pela soma dos pesos.

Exemplo:

Um aluno obteve, em certa disciplina, média 7 nas provas mensais, grau 8 na primeira prova parcial, grau 5 na segunda e grau 3 em prova oral.

Calcular o grau de aprovação do aluno, sabendo que a lei atribui pêso 2 à média mensal e a primeira prova parcial tem pêso 2 e as duas outras têm pêso 3.

Resolução:

a) soma dos produtos dos graus pelos pesos respectivos:

$$7 \times 2 + 8 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 3 = 54$$

b) soma dos pesos: $2 + 2 + 3 + 3 = 10.$

O grau de aprovação é a média ponderada:

$$M_p = \frac{54}{10} = 5,4$$

18. Média harmônica.

Média harmônica entre vários números é o inverso da média aritmética dos inversos dêsses números.

Exemplo:

Calcular a média harmônica dos número 6 e 12.

A média aritmética dos inversos é:

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{\frac{3}{12}}{2} = \frac{3}{24}$$

A média harmônica será, por definição, o inverso dêsse resultado, isto é,

$$M_h = \frac{24}{3} = 8.$$

19. Média geométrica.

Média geométrica de vários números é o resultado que se obtém, multiplicando os mesmos números e extraindo a raiz do produto, de índice igual ao número de fatôres.

Exemplo:

A média geométrica dos números 4, 6 e 9, será

$$M_g = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 9} = 6.$$

EXERCÍCIOS

1. Razões.

Exprimir as seguintes razões, com os menores números inteiros que fôr possível:

1. $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$ *Resp.*: 3/4.
2. 5,7 : 0,95. *Resp.*: 6.
3. 91 : 117. *Resp.*: 7/9.
4. $\frac{9}{10} : \frac{24}{25}$. *Resp.*: 15/16.
5. 5,06hl para 815*l*. *Resp.*: 506/815.
6. 3,8dam para 570dm. *Resp.*: 2/3.
7. 4h 25m para 1h. *Resp.*: 53/12.
8. Um aluno recebe 44 problemas para resolver e um segundo aluno recebe 50. O primeiro acerta 20 e o segundo acerta 24. Calcule a razão entre o número de exercícios certos e o total, para cada aluno. Qual dos alunos apresenta melhor resultado? *Resp.*: O segundo.

2. Proporções.

Achar o valor de x nas proporções:

9. $\frac{35}{x} = \frac{5}{3}$. *Resp.:* 21.

10. $\frac{2/3}{5} = \frac{x}{3/4}$. *Resp.:* 0,1.

11. $\frac{15/28}{5/8} = \frac{6/7}{x}$. *Resp.:* 1.

12. $\frac{2,6}{0,65} = \frac{x}{5,8}$. *Resp.:* 23,2.

13. $\frac{2,1}{4\frac{1}{5}} = \frac{3/5}{x}$. *Resp.:* $1\frac{1}{5}$.

14. $\frac{x}{2-\frac{1}{5}} = \frac{3/8}{6,75}$. *Resp.:* 0,1.

15. $\frac{0,84}{5,6} = \frac{x}{37,33\ldots}$. *Resp.:* 5,6.

16. Dizer qual das seguintes relações está certa:

$$\frac{1/2}{1/3} = \frac{1/4}{1/6}; \quad \frac{45}{135} = \frac{4}{8}.$$ *Resp.:* A primeira.

17. Da igualdade dos seguintes produtos, concluir às oito proporções possíveis:

$$9 \times 14 = 6 \times 21 \qquad 5 \times 12 = 15 \times 4 \qquad a \times b = c \times d.$$

Achar a quarta proporcional a:

18. 14, 15 e 21. *Resp.:* 22,5.

19. 8, $3\frac{1}{5}$ e $7\frac{1}{2}$. *Resp.:* 3.

20. 0,5, 1,5 e 7. *Resp.:* 21

21. 14, 0,7 e $\frac{3}{4}$. *Resp.:* $\frac{3}{80}$.

22. Dada a proporção $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$ completar as proporções, mediante uma única transformação da que foi dada:

$a)$ $\frac{}{18} = \frac{3}{}$; $b)$ $\frac{}{9} = \frac{}{18}$; $c)$ $\frac{12}{} = \frac{9}{}$; $d)$ $\frac{}{6} = \frac{27}{}$.

Achar o valor de x nas proporções, isto é, resolver as equações:

23. $\frac{x+3}{10} = \frac{9}{18}$ 24. $\frac{4}{x-4} = \frac{2}{13}$ 25. $\frac{x-3}{x+3} = \frac{2}{3}$ 26. $\frac{x+5}{8} = \frac{12+x}{16}$.

Resp.: 2, 30, 15, 2.

Resolver os sistemas do 1.º grau:

27. $x + y = 20$ e $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. *Resp.:* 8 e 12.

28. $x - y = 16$ e $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$. *Resp.:* 40 e 24.

29. $x + y = 24$ e $\frac{5}{x} = \frac{10}{y}$. *Resp.:* 8 e 16.

30. $x - y = 28$ e $\frac{x}{40} = \frac{y}{8}$. *Resp.:* 35 e 7.

31. $x + y + z = 22$ e $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{24}$. *Resp.:* 4, 6 e 12.

32. $x + y + z = 40$ e $\frac{2}{x} = \frac{6}{y} = \frac{8}{z}$. *Resp.:* 5, 20 e 15.

33. $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$ e $2x + 3y + z = 17$. *Resp.:* 2, 3 e 4.

34. $\frac{7}{x} = \frac{3}{y} = \frac{1}{z}$ e $3x - 2y + 4z = 38$. *Resp.:* 14, 6 e 2.

3. Médias.

Achar as médias proporcional e aritmética dos números:

35. 12 e 75. *Resp.:* 30 e 43,5.

36. $\frac{32}{5}$ e $\frac{36}{490}$. *Resp.:* $\frac{24}{35}$ e $\frac{793}{245}$.

37. 0,75 e 0,03. *Resp.:* 0,15 e 0,39.

Achar a terceira proporcional aos números (sendo a média proporcional segundo número):

38. $5\frac{1}{4}$ e 7. *Resp.:* $9\frac{1}{3}$.

39. 3 e 12. *Resp.:* 48.

40. 0,49 e 0,7. *Resp.:* 1.

41. 5 e $\frac{4}{3}$ *Resp.:* $\frac{16}{45}$.

Achar a média ponderada dos números:

42. 5, 8 e 14 com os pesos 3, 2 e 1. *Resp.:* 7,5.

43. $3\frac{2}{3}$, 7 e 16 com os pesos 3, 4 e 1, respectivamente. *Resp.:* 6,825.

44. 7,8, 5 e 2,4 com pesos 2, 3 e 1, respectivamente. *Resp.:* 5,5.

Achar a média harmônica dos números:

45. 3, 4 e 9. *Resp.:* 4,32.

46. 5,4, $4\frac{1}{2}$ e 6. *Resp.:* $5\frac{7}{31}$.

4. Problemas.

47. A razão entre as áreas de dois campos é $\frac{3}{4}$, e o campo menor tem 6ha. Achar o número de ha do campo maior. *Resp.:* 8ha.

48. A soma de dois números é 54 e a razão 7/11. Calcular os dois números. *Resp.:* 21 e 33.

49. A diferença entre dois números é 15 e a razão 8/5. Calcular os dois números. *Resp.:* 40 e 25.

50. Decompor 45 em duas parcelas, que estejam entre si na razão de 2 para 3. *Resp.:* 18 e 27.

51. A razão entre dois números é 3, e sua soma é 72. Achar os dois números. *Resp.:* 54 e 18.

52. Num ginásio há ao todo 540 alunos. Distribuídos em classes, a cada classe de 45 meninos corresponde uma classe de 30 meninas. Calcular o número de meninas do ginásio. *Resp.:* 216.

53. Achar dois números, na razão $\frac{3}{4}$, sendo 432 o seu produto. *Resp.:* 18 e 24.

54. A razão entre a base e a altura de um triângulo é de 5 para 2, e a área do triângulo é de $45m^2$. Calcular a base e a altura. *Resp.:* 15m e 6m.

55. A diferença entre os quadrados de dois números é $\frac{57}{144}$ e a razão entre êles é $\frac{8}{11}$. Achar os números. *Resp.:* $\frac{8}{12}$ e $\frac{11}{12}$.

56. Uma fração é igual a 3/5. O denominador excede de 4 unidades o numerador. Achar a fração. *Resp.:* $\frac{6}{10}$.

57. A soma de dois números é 204 e a razão $\frac{7}{3}$. Achar os dois números. *Resp.:* 142,8 e 61,2.

58. A diferença entre dois números é 105 e a razão $\frac{3}{5}$. Achar os dois números. *Resp.:* 157,5 e 262,5.

59. O produto de dois números é 0,96 e a razão $\frac{2}{3}$. Achar os dois números. *Resp.:* 0,8 e 1,2.

60. Achar uma fração igual a $\frac{5}{6}$ e cuja soma dos têrmos seja 16,5 *Resp.:* $\frac{7,5}{9}$

61. Achar dois números na razão de $\frac{3}{4}$ e cuja soma dos quadrados seja 100. *Resp.:* 6 e 8.

62. Achar dois números na razão de $\frac{3}{5}$ e cuja diferença dos quadrados seja 144. *Resp.:* 9 e 15.

63. Achar dois números, cujo produto seja 140 e a razão 5/7. *Resp.:* 10 e 14.

64. Uma barra feita com uma liga de ouro e cobre tem a massa de 513g. Achar a massa de cada metal sabendo que estão na razão de 11 para 8. *Resp.:* 297g, 216g.

65. Achar uma fração tal que, se somarmos 5 unidades aos dois têrmos, ela se torne igual a 5/8 e, se subtrairmos 3 unidades, torne-se igual a $\frac{1}{4}$. *Resp.:* 5/11.

III — NÚMEROS PROPORCIONAIS

20. Números diretamente proporcionais.

Duas sucessões de números são denominadas diretamente proporcionais ou, apenas, proporcionais, quando a razão entre um número qualquer da primeira e seu correspondente na segunda é constante.

As duas sucessões $\begin{cases} 3, & 5, & 8, & 11 \\ 9, & 15, & 24, & 33 \end{cases}$

são proporcionais porque

$$\frac{3}{9} = \frac{5}{15} = \frac{8}{24} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

O valor comum das razões $k = 1/3$ é denominado ***fator*** ou ***coeficiente*** de ***proporcionalidade***.

Os têrmos da primeira valem 1/3 dos da segunda. Do mesmo modo, os da segunda valem o triplo dos da primeira.

Exemplo:

Dadas as duas sucessões proporcionais:

$$\begin{matrix} 3, & 5, & 7, & y \\ 6, & 10, & x, & 8 \end{matrix}$$

achar o coeficiente de proporcionalidade e os valores de x e y.

Resolução. O coeficiente de proporcionalidade é:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo temos:

$$\frac{7}{x} = \frac{1}{2} \therefore x = 7 \times 2 = 14$$

$$\frac{y}{8} = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{8 \times 1}{2} = 4$$

21. Números inversamente proporcionais.

Duas sucessões são denominadas inversamente proporcionais, quando o produto de dois têrmos correspondentes é constante.

Assim, os números: 30, 25, 20, 15
e 10, 12, 15, 20

são inversamente proporcionais; o produto dos têrmos correspondentes é sempre 300.

O produto constante denomina-se *coeficiente de proporcionalidade.*

Os números inversamente proporcionais, os dados acima, por exemplo, satisfazem a condição:

$$30 \times 10 = 25 \times 12 = 20 \times 15 = 15 \times 20.$$

Êsses produtos podem também ser escritos com a forma

$$\frac{30}{\frac{1}{10}} = \frac{25}{\frac{1}{12}} = \frac{20}{\frac{1}{15}} = \frac{15}{\frac{1}{20}}$$

Podemos, pois, concluir, que os números

30, 25, 20, 15

são diretamente proporcionais aos números

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}.$$

Concluímos, então:

Duas sucessões são inversamente proporcionais, quando os têrmos da primeira são diretamente proporcionais aos inversos dos da segunda.

22. Propriedades dos números proporcionais. Suponhamos proporcionais os números:

$$a, \quad b, \quad c, \quad d$$
$$a', \quad b', \quad c', \quad d'.$$

Teremos então as razões iguais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Multiplicando os antecedentes pelo mesmo número m, as razões permanecerão iguais, pois tôdas ficarão m vêzes maiores; assim:

$$\frac{am}{a'} = \frac{bm}{b'} = \frac{cm}{c'} = \frac{dm}{d'}$$

Logo, as sucessões

$$am, \quad bm, \quad cm, \quad dm$$
$$a', \quad b', \quad c', \quad d'$$

são proporcionais.

Aplicação. ***Eliminação de denominadores.*** Sejam as sucessões proporcionais:

$$12, \quad 18, \quad 20$$
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}$$

Multiplicando os da segunda pelo m.m.c. dos denominadores, que é 12, obtemos

$$\begin{matrix} 12, & 18, & 20 \\ 6, & 9, & 10 \end{matrix}$$

em que todos os números são *inteiros.*

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A mesma propriedade pode ser aplicada aos números inversamente proporcionais, pois podemos considerá-los diretamente proporcionais aos inversos.

2.ª) Anàlogamente se conclui a propriedade em relação à divisão.

23. Grandezas diretamente proporcionais. Se representarmos o lado de um quadrado por l, o perímetro será obtido multiplicando-o por 4, isto é, será $4l$.

Assim, podemos formar a seguinte tabela de correspondência dos diferentes estados das duas grandezas:

lado em metros.....	1	2	3	4	...
perímetro em metros	4	8	12	16	...

Observemos que as medidas das duas grandezas formam duas sucessões proporcionais porque

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \ldots.$$

As duas grandezas são, então, denominadas ***diretamente proporcionais*** ou, apenas, ***proporcionais.***

24. Grandezas inversamente proporcionais. Consideremos um automóvel percorrendo uma estrada de 240km. Se a *velocidade* fôr de 30 quilômetros por hora, o *tempo necessário* para percorrer a estrada será de 8 horas; se a velocidade fôr de 60km/h, o tempo será de 4 horas. Podemos formar a tabela de correspondência dos estados das duas grandezas:

velocidade em km/h.	60	40	30	20
tempo em horas...	4	6	8	12

Observemos que as medidas das duas grandezas formam duas sucessões inversamente proporcionais. O coeficiente de proporcionalidade é 240.

Dizemos, então, que as duas grandezas ***velocidade*** e ***tempo*** são ***inversamente proporcionais.***

Exemplo:

Com a velocidade de 60km/h, um trem gasta 10 horas para percorrer a distância entre duas cidades. Que tempo gastará para percorrer a mesma distância com a velocidade de 40km/h?

RESOLUÇÃO. Dispondo os valores dados das grandezas inversamente proporcionais de modo que se correspondam, teremos:

$$\begin{matrix} \text{velocidades} \ldots & 60 & 40 \\ \text{tempos} \ldots\ldots & 10 & x \end{matrix}$$

O produto de dois valores correspondentes é constante; como o produto de 60 por 10 é 600, concluímos que o produto de dois outros valores correspondentes quaisquer será também 600, logo, temos:

$$40x = 600 \therefore x = \frac{600}{40} = 15\text{h}.$$

25. Grandezas proporcionais a duas outras. Uma grandeza é proporcional a 2 outras, quando, fixando uma dessas últimas, a grandeza dada varia proporcionalmente à outra.

Exemplo:

A área de um retângulo depende da base e da altura.

Conservando o valor fixo 3 da altura, como vemos na figura seguinte, a área é diretamente proporcional à base:

$3 \boxed{S = 6}$ 2 $\quad$ $3 \boxed{S = 12}$ 4 $\quad$ e $\quad$ $3 \boxed{S = 18}$ 6.

assim, dando à base os valores 2, 4, 6, temos os números proporcionais:

6, 12, 18

e 2, 4, 6.

Ao mesmo resultado chegaremos, conservando fixa a base e fazendo variar a altura. Concluímos, então, ser a área de um retângulo diretamente proporcional à base e à altura.

26. Propriedade das grandezas proporcionais a várias outras. Suponhamos um retângulo variando nas condições da figura abaixo. S, S_1 e S' representam os números resultantes das medidas de suas áreas; a, a', b e b' os números resultantes das medidas da base e da altura.

$a \boxed{S}$ b $\quad$ $a \boxed{S_1}$ b' $\quad$ $a' \boxed{S'}$ b'

Da primeira para a segunda figura a altura é fixa; logo, a área será diretamente proporcional à base; temos, pois:

$$\frac{S}{b} = \frac{S_1}{b'}.$$

Da segunda para a terceira figura a base é fixa, e temos anàlogamente:

$$\frac{S_1}{a} = \frac{S'}{a'}.$$

Multiplicando, têrmo a têrmo, as duas proporções, obtemos a proporção:

$$\frac{SS_1}{ab} = \frac{S_1S'}{a'b'}$$

ou, dividindo os antecedentes por S_1:

$$\frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'}.$$

O mesmo dar-se-á para mais de duas grandezas, concluindo-se a propriedade:

Quando uma grandeza é proporcional a várias outras, os números que exprimem sua medida são proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras.

OBSERVAÇÃO. No caso das grandezas inversamente proporcionais, a mesma propriedade será aplicada em relação aos inversos dos números resultantes das medidas das outras grandezas.

Exemplo: Conhecemos a fórmula da área do retângulo

$$S = bh$$

daí, concluímos:

$$h = \frac{S}{b} = S \times \frac{1}{b}$$

Assim, a altura é diretamente proporcional à área e inversamente proporcional à base.

IV — DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

27. Divisão em partes diretamente proporcionais. Dividir um número em partes proporcionais a outros é decompô-lo em parcelas proporcionais a êsses outros.

Primeiro exemplo. *Decompor o número 180 em partes proporcionais a 3, 4 e 11.*

Representemos por x, y e z as parcelas de 180, proporcionais a 3, 4 e 11. Devemos ter:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}.$$

Para achar as parcelas x, y e z, é suficiente conhecer o fator de proporcionalidade, como vimos no estudo dos números proporcionais; para isso aplicamos a propriedade das razões iguais ou proporção prolongada e obtemos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} = \frac{x + y + z}{3 + 4 + 11}.$$

Daí, concluímos, por ser $x + y + z = 180$:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} = \frac{180}{18} = 10.$$

O fator de proporcionalidade é 10; logo, temos:

$$x = 3 \times 10 = 30$$
$$y = 4 \times 10 = 40$$
$$z = 11 \times 10 = 110$$

Verificação: $x + y + z = 30 + 40 + 110 = 180.$

Segundo exemplo. *Dividir o número 153 em partes proporcionais a* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$.

O número 153 deve ser decomposto em duas parcelas x e y; temos, assim, os números proporcionais:

$$\begin{matrix} x & y \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4}. \end{matrix}$$

Multiplicando os números da segunda sucessão por 12 (m.m.c. dos denominadores), obtemos ainda números proporcionais:

$$\begin{matrix} x & y \\ 8 & 9 \end{matrix}$$

Assim:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{9} = \frac{x + y}{8 + 9} = \frac{153}{17} = 9;$$

logo,
$$\begin{cases} x = 8 \times 9 = 72 \\ y = 9 \times 9 = 81. \end{cases}$$

Verificação: $x + y = 72 + 81 = 153.$

Observação. Concluímos, dêsse segundo exemplo, que o cálculo pode sempre ser feito sôbre números inteiros.

28. Divisão em partes inversamente proporcionais. Dividir um número em partes inversamente proporcionais a outros é o mesmo que dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos inversos dêsses outros. Exemplo:

Dividir o número 341 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.

Sendo x, y e z as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$; assim, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}.$$

Multiplicando os conseqüentes por 30 (m.m.c. dos denominadores), obtemos:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}.$$

o fator de proporcionalidade é:

$$\frac{x + y + z}{15 + 10 + 6} = \frac{341}{31} = 11;$$

donde

$$\begin{cases} x = 15 \times 11 = 165 \\ y = 10 \times 11 = 110 \\ z = 6 \times 11 = 66. \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar o coeficiente de proporcionalidade entre os seguintes grupos de números proporcionais:

   2, 5, 8, 10
   e 14, 35, 56, 70 *Resp.:* $\frac{1}{7}$.

2. Verificar se os seguintes números são proporcionais:

   45, 60, 75
   e 3, 4, 5 *Resp.:* Sim; coeficiente 15.

3. Achar x nas sucessões proporcionais:

   2 8 3
   4 16 x *Resp.:* 6.

4. A grandeza x é diretamente proporcional a y. Quando a grandeza y tem o valor 8, x tem o valor 40. Determinar o valor da grandeza x, quando y vale 10. *Resp.:* 50.

5. Achar os valores de x e y, nos seguintes grupos de números proporcionais: 3, 4, 5

   e 60, x, y *Resp.:* 80 e 100.

6. Verificar se os números dos seguintes grupos são inversamente proporcionais: 78, 104, 91

   e $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ *Resp.:* Sim.

7. Achar os valores de x e y nos seguintes grupos de números inversamente proporcionais:

   64, 72, 48, 96
   e 9, 8, x, y *Resp.:* 12 e 6.

8. Substituir nos seguintes grupos os números fracionários por inteiros, de modo que os grupos continuem proporcionais:

   64, 72, 48
   $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ *Resp.:* 8, 9 e 6.

9. Em 18 gramas de água, há 2 de hidrogênio e 16 de oxigênio; em 45 gramas de água há 5 de hidrogênio e 40 de oxigênio. Verificar se há proporcionalidade entre os pesos de água e hidrogênio, água e oxigênio, e hidrogênio e oxigênio. Determinar os coeficientes de proporcionalidade. *Resp.:* Sim; 9; $\frac{9}{8}$; $\frac{1}{8}$.

10. A grandeza x é diretamente proporcional a y e assume o valor 40 quando y é igual a 8. Achar o valor de x, quando y é igual a 12. *Resp.:* 60.

11. A grandeza y é inversamente proporcional a x, e quando x vale 4 o valor correspondente de y é 48. Qual o valor de y, quando x vale 10? *Resp.:* 19,2.

12. Um trem, com a velocidade de 60km/h, percorre uma certa distância em 3,5h. Calcular a velocidade de um segundo trem que faz o mesmo percurso em 5h. *Resp.:* 42km/h.

13. Uma grandeza A é diretamente proporcional a B e C, e A recebe o valor 9, quando B e C têm, respectivamente, os valores 5 e 7. Achar o valor de A, quando B vale 3 e C vale 2. *Resp.:* $\frac{54}{35}$.

14. A grandeza x varia diretamente em relação a y e inversamente em relação a z. Quando y vale 15 e z vale 6, x assume o valor 10. Achar o valor de x, quando y vale 8 e z vale 2. *Resp.:* 16.

15. Verificar, pelos valores conhecidos correspondentes, que as grandezas x e y, do quadro abaixo, são proporcionais. Calcular o coeficiente de proporcionalidade e achar os valores de cada grandeza, deixados em branco no quadro:

x	6	5		7
y	30	25	40	

Resp.: 8, 35.

16. Sendo x e y grandezas inversamente proporcionais, preencher os espaços vazios em:

x	12	30		
y		10	6	4

Resp.: 25, 50, 75.

17. Dividir 180 em três partes, diretamente proporcionais a 3, 4 e 5. *Resp.:* 45, 60, 75.

18. Dividir 3 410 em três partes, inversamente proporcionais a 5, 3 e 2. *Resp.:* 660, 1 100 e 1 650.

19. Dividir o número 184 em partes diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$. *Resp.:* 64, 72 e 48.

20. Dividir o número 273 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$. *Resp.:* 78, 104, 91.

21. Três operários contratam fazer um serviço em conjunto por Cr$7 200,00. O primeiro trabalhou 10 dias a 8 horas por dia; o segundo, 5 dias a 10 horas por dia e o terceiro, 4 dias a 5 horas por dia. Quanto deve receber cada um, se os salários são diretamente proporcionais às horas de trabalho? *Resp.:* Cr$ 3 840,00, Cr$ 2 400,00 e Cr$ 960,00.

22. A quantia de Cr$ 4 500,00 deve ser repartida entre três pessoas de modo que a segunda receba o dôbro da primeira e a terceira o triplo da segunda. Quanto tocará a cada uma? *Resp.:* Cr$ 500,00; Cr$ 1 000,00 e Cr$ 3 000,00.

23. Uma grandeza A é diretamente proporcional a B e C. A recebe o valor 7, quando B e C têm, respectivamente, os valores 3 e 4. Achar o valor de A, quando B vale 8 e C vale 15. *Resp.:* 70.

24. Dividir 308 em partes diretamente proporcionais a 3/8, 3/4 e 4/5 *Resp.:* 60, 120 e 128.

25. Dividir 1 894 em partes inversamente proporcionais a 5/4, 8/5 e 11/8. *Resp.:* 704, 550 e 640.

26. Dividir o número 266 em três partes diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$. *Resp.:* 80, 90 e 96.

27. Divide-se um número em três partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7. A primeira parte vale 45. Achar o número e as outras duas partes. *Resp.:* 225, 75 e 105.

28. Certa quantia foi distribuída entre duas pessoas em partes proporcionais a 3 e 4; a segunda recebeu Cr$ 2 000,00 mais que a primeira. Qual a quantia distribuída? Qual a parte de cada pessoa? *Resp.:* Cr$ 14 000,00, Cr$ 6 000,00 e Cr$ 8 000,00.

29. Certa quantia foi distribuída entre três pessoas em partes respectivamente proporcionais a 2, 3 e 4. A terceira pessoa recebeu Cr$ 800,00. Qual a quantia repartida? Qual a parte de cada uma das outras duas? *Resp.:* Cr$ 1 800,00; Cr$ 400 e Cr$ 600,00.

30 Repartiu-se certa quantia entre três pessoas em partes proporcionais a 5, 7 e 9. A terceira recebeu Cr$ 1 000,00 mais que a segunda. Qual a quantia repartida? *Resp.:* Cr$ 10 500,00.

V — REGRA DE TRÊS

29. Natureza dos problemas. Os problemas sôbre grandezas proporcionais são de dois tipos:

1.º) ***Regra de três simples*** — Quando envolve DUAS GRANDEZAS:

Dados *dois* valores da primeira e *um* da segunda, achar o novo valor da segunda, correspondente aos TRÊS conhecidos

Daí a denominação de ***regra de três*** dada a êsses problemas.

Denominam-se ***têrmos principais*** os dois valores conhecidos da mesma grandeza, e ***têrmos relativos*** os dois valores da grandeza, em que um é desconhecido.

2.º) ***Regra de três composta*** — Quando envolve mais de DUAS GRANDEZAS.

30. Regra de três simples.

A regra de três simples pode ser ***direta*** ou ***inversa***, conforme as grandezas sejam direta ou inversamente proporcionais.

Primeiro exemplo. ***Regra de três simples direta.***

Quatro quilogramas de farinha de trigo produzem cinco pães de 1kg; quantos quilogramas de farinha serão necessários para produzir cento e vinte pães?

Os dados podem ser dispostos sob a forma:

4 kg de farinha produzem 5 pães
x kg de farinha produzirão 120 pães

As grandezas são diretamente proporcionais; *a razão dos têrmos relativos* é igual à *razão dos principais;* logo, temos a proporção:

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{120} \therefore x = \frac{120 \times 4}{5} = 96.$$

Resp.: São necessários 96kg de farinha.

Segundo exemplo. ***Regra de três simples inversa.***

Uma torneira, jorrando 20 litros de água por minuto, enche um reservatório em 6 horas. Qual o tempo em que encherá o mesmo reservatório, uma torneira que deite 30 litros de água por minuto?

Os dados podem ser dispostos:

20 litros correspondem a 6 horas
30 litros corresponderão a x horas.

Quanto ***maior o número de litros*** vertidos por minuto, ***menor será o tempo*** gasto para encher o reservatório. As grandezas são inversamente proporcionais; *a razão dos têrmos relativos é igual à razão inversa dos principais.* Assim, temos a proporção:

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{6} \therefore x = \frac{6 \times 20}{30} = 4.$$

Resp.: A segunda torneira enche o reservatório em 4 horas.

Terceiro exemplo. *Um trem percorre 177km em 4 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 28 minutos, supondo a velocidade constante?*

Os dados são dispostos:

4 horas ——— 177km
28 minutos ——— $x$km.

Em primeiro lugar, para achar a razão entre os dois valores do tempo é necessário *reduzí-los à mesma unidade;* reduzindo as horas a minutos, temos, então:

240 min ——— 177km
28 min ——— $x$km.

Sendo direta a regra de três, a razão dos principais é igual à dos relativos, daí a proporção:

$$\frac{240}{28} = \frac{177}{x} \therefore x = \frac{177 \times 28}{240} = 20{,}65\text{km}.$$

Resp.: Em 28 minutos o trem percorre 20,65km.

31. Método de redução à unidade. Chama-se *método de redução à unidade* ou *análise aritmética* o processo de raciocínio que consiste em partir do ***valor dado*** de uma grandeza para a ***unidade,*** e desta para o ***valor procurado*** da mesma grandeza. Exemplos:

Primeiro problema. *Quatro quilogramas de farinha de trigo produzem cinco de pão; quantos quilogramas de farinha serão necessários para produzir 120 quilogramas de pão?*

5kg de pão correspondem a 4kg de farinha.

1kg de pão corresponderá a $\frac{4}{5} = 0{,}8$kg de farinha.

120kg de pão corresponderão a $0{,}8 \times 120 = 96$kg de farinha.

Segundo problema. *Uma torneira, que jorra 20 litros de água por minuto, enche um reservatório em 6 horas. Qual o tempo em que encherá o mesmo reservatório uma torneira que deite 30 litros de água por minuto?*

Jorrando 20l gasta 6 horas.
Jorrando 1l gastará 6×20 horas.
Jorrando 30l gastará $\frac{6 \times 20}{30} = 4$ horas.

32. Regra de três composta. Na regra de três composta, a grandeza cujo valor procuramos pode ser ***diretamente*** proporcional a *tôdas* as outras, pode ser ***inversamente*** proporcional a *tôdas* as outras, e, pode, ainda, ser diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional a outras. Como os números inversamente proporcionais a outros são diretamente proporcionais a seus inversos, podemos reduzir todos os casos ao primeiro, invertendo os números correspondentes às grandezas inversamente proporcionais. Realizada esta transformação, poderemos aplicar a propriedade conhecida:

Quando uma grandeza é proporcional a várias outras, os números que exprimem sua medida são proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras.

Exemplos:

1.º) *A despesa com um bico de gás, que funciona 5 horas por dia durante 9 dias, é de Cr$ 600,00. Qual será a despesa se o mesmo bico funcionar 7 horas por dia, durante 30 dias?*

Método das proporções. A despesa é diretamente proporcional ao número de dias e de horas. A regra de três é composta e *tôdas* as grandezas são diretamente proporcionais.

Dispomos os dados do problema como segue:

5 horas	——	9 dias	——	600 cruzeiros
7 horas	——	30 dias	——	x cruzeiros
(d)		(d)		

A razão dos relativos é igual ao ***produto*** das razões ***diretas*** dos principais. Assim:

$$\frac{600}{x} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{30} \text{ ou } \frac{600}{x} = \frac{45}{210}$$

donde:
$$x = \frac{600 \times 210}{45} = 2800$$

Resp.: A despesa é de Cr$ 2 800,00.

Método de redução à unidade.

Funcionando 5 horas durante 9 dias, gasta 600

Funcionando *1* hora durante 9 dias, gastará $\frac{600}{5}$

Funcionando *1* hora durante *1* dia, gastará $\frac{600}{5\times 9}$

Funcionando 7 horas durante *1* dia, gastará $\frac{600\times 7}{5\times 9}$

Funcionando 7 horas durante 30 dias, gastará $\frac{600\times 7\times 30}{5\times 9}$

A despesa pedida será: $\frac{600\times 7\times 30}{5\times 9} = \frac{25200}{9} = 2800.$

2.º) *Uma máquina de rotular garrafas funcionou durante 6 horas por dia e rotulou 3 000 garrafas em 6 dias. Quantas horas deverá funcionar por dia, para rotular 5 000 garrafas em 4 dias?*

Resolução. Disposição dos dados:

6 horas	——	3 000 garrafas	——	6 dias
x horas	——	5 000 garrafas	——	4 dias
		(*d*)		(*i*)

Os símbolos (*d*) e (*i*), de *direta* e *inversa*, resultam da comparação com a grandeza desconhecida:

MAIS horas, MAIS garrafas: (*d*)
MAIS horas, MENOS dias: (*i*)

Os têrmos assinalados com (*i*) devem ser *invertidos*; assim teremos:

$$\frac{6}{x} = \frac{3\,000}{5\,000} \times \frac{4}{6}$$

ou, simplificando e efetuando:

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{5} \text{ donde } x = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ horas}$$

Resp.: Deverá funcionar 15 horas diárias.

3.º) *Quantos dias gastarão 20 homens para cortar 1 000 estéreos de lenha, se 15 homens podem cortar 1 500 estéreos em 30 dias?*

Resolução. Sendo x o número de dias, a disposição dos dados será:

dias	*homens*	*estéreos*
x	20	1 000
30	15	1 500
	(*i*)	(*d*)

O número de dias é inversamente proporcional ao número de homens e diretamente proporcional ao de estéreos, como indicam as letras *i* e *d*. Temos:

$$x = 30 \times \frac{15}{20} \times \frac{1\,000}{1\,500} = \frac{3 \times 15 \times 10}{2 \times 15} = 15 \text{ dias.}$$

EXERCÍCIOS

Resolver os problemas:

1. Se 3m de certa fazenda custaram Cr$ 165,00, quanto custarão 7m da mesma fazenda? *Resp.:* Cr$ 385,00.
2. Um automóvel gasta 10 litros de gasolina para percorrer 65km. Quantos litros gastará num percurso de 910km? *Resp.:* 140*l*.
3. Qual o tempo gasto pôr 12 homens para executar um trabalho que 8 homens, nas mesmas condições, executam em 9 dias? *Resp.:* 6 dias.
4. Uma fonte dá 38*l* de água em 5 minutos; quantos litros dará em hora e meia? *Resp.:* 684*l*.
5. Para tecer 19m de um tecido com 50cm de largura são gastos 38kg de lã. Quantos metros serão tecidos com 93kg da mesma lã, sendo a largura de 60cm? *Resp.:* 38,75m.
6. O transporte de uma carga de 3 toneladas numa estrada de 50km importa em Cr$ 1 200,00. Quanto custará o transporte de 2 toneladas numa estrada de 30km, à mesma razão? *Resp.:* Cr$ 480,00.
7. Numa transmissão de correia, a polia maior tem 30cm de diâmetro e a menor 18cm. Qual o número de rotações por minuto da menor polia, se a maior dá 45 no mesmo tempo? *Resp.:* 75 rotações p/min.
8. Com 9ha de pasto podem ser mantidas 20 cabeças de gado. Quantos ha serão necessários para manter 360 cabeças? *Resp.:* 162ha.
9. Uma máquina, que funciona 4 horas por dia durante 6 dias produz 2 000 unidades. Quantas horas deverá funcionar por dia para produzir 20 000 unidades em 30 dias? *Resp.:* 8 horas por dia.
10. Um comerciante tem de lucro 2/5 do preço de compra dos artigos com que negocia. Tendo vendido Cr$ 2 800,00, qual o lucro auferido? *Resp.:* Cr$ 800,00.
11. Se 5 pence valem Cr$ 10,00, quanto valerão £20-15-7? *Resp.:* Cr$ 9 600,00.
12. Se uma libra esterlina vale Cr$ 520,00 qual o valor de doze pence? *Resp.:* Cr$ 26,00.

13. Uma livraria do Rio manda pagar a uma casa editora de Paris uma fatura de 1 400 francos, por intermédio de um banco de Londres. Qual a quantia necessária em moeda brasileira, se 14 francos valem uma libra e o cruzeiro vale ½ pence? *Resp.:* Cr$ 48 000,00.
14. Se 144 dólares valem Cr$ 25 920,00, quanto valerão 50 dólares? *Resp.:* Cr$ 9 000,00.
15. Quanto valem 36 francos, sabendo-se que 150 francos valem Cr$ 5 850,00? *Resp.:* Cr$ 1 404,00.
16. Um homem percorre 120km em 5 dias, marchando 6 horas por dia. Em quantos dias caminhará 320km, marchando 8 horas por dia? *Resp.:* 10 dias.
17. Pagaram-se Cr$ 1 800,00 pelo frete de 1,2t de minério a 90km. Quanto custará o frete de 750kg de minério a 80km? *Resp.:* Cr$ 1 000,00.
18. Um automóvel, com a velocidade de 80km por hora, percorreu certa distância em 6 horas. Que tempo gastará para percorrer a mesma distância se reduzir a velocidade para 50km por hora? *Resp.:* 9h 36 min.
19. Um automóvel percorreu certa distância em 4h, com a velocidade de 60km por hora. Qual o tempo que gastará para percorrer a mesma distância com a velocidade de 90km por hora? *Resp.:* 2h 40 min.
20. A medida da circunferência é expressa em grados pelo número 400 e, em graus, pelo número 360. Qual o número de grados de um arco de 50°15'? *Resp.:* 55,83gr.

VI — PERCENTAGEM

33. Noção de percentagem. Definições. A razão entre dois valores de uma grandeza pode ser estabelecida com um conseqüente ou denominador qualquer. Suponhamos que no primeiro ano dum colégio há ao todo 90 alunos e 27 são alunas; a razão entre o número de alunas e o total será:

$$\frac{27}{90}$$

e, essa razão pode ser expressa com as formas:

$$\frac{27}{90}, \quad \frac{9}{30}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{30}{100}, \quad \text{etc.}$$

Assim, podemos dizer, com o mesmo sentido:

No primeiro ano do colégio $\frac{27}{90}$ dos alunos são meninas, ou, três décimos dos alunos são meninas, ou trinta centésimos dos alunos são meninas.

A razão expressa com o denominador 100 recebe o nome particular de *percentagem*, e é muito empregada por estabelecer um têrmo fixo de comparação. No exemplo anterior, a razão, sob a forma de percentagem, é $\frac{30}{100}$.

A razão $\frac{30}{100}$ escreve-se também 30%. O símbolo % traduz uma percentagem.

O numerador 30 da razão denomina-se ***taxa de percentagem***. O número total 90 é denominado ***principal***.

Observemos que o número de meninas, 27, é uma fração do todo 90, isto é, vale $\frac{30}{100}$ de 90, ou, o que é o mesmo, 30% de 90.

Assim dizemos: 27 é trinta por cento de 90, ou, trinta por cento dos alunos são meninas.

É sempre possível exprimir uma razão sob forma de percentagem, e, recìprocamente, exprimir uma percentagem sob forma de fração irredutível.

Observação. Em certos casos usa-se a *taxa milesimal* que se representa com o símbolo ‰. Assim, 3‰ significa *3 por mil* ou *3 milésimos*

Exemplos:

1.º) *Exprimir a razão* $\frac{3}{25}$ sob a forma de percentagem.

A questão consiste em achar uma razão igual a $\frac{3}{25}$ e de denominador 100. Representando por x o numerador da razão procurada, temos:

$$\frac{3}{25} = \frac{x}{100} \therefore x = \frac{3 \times 100}{25} = 12.$$

Assim, a percentagem é $\frac{12}{100}$ ou 12%.

2.º) *Exprimir 2,5% sob forma de fração irredutível.*

Temos:

$$\frac{2,5}{100} = \frac{25}{1\,000},$$

ou, reduzindo à expressão mais simples:

$$\frac{25}{1\,000} = \frac{1}{40}.$$

A fração irredutível correspondente é $\frac{1}{40}$.

34. Cálculo da percentagem. Exemplos:

1.º) *Calcular 5% de Cr\$ 208,00.*

O problema consiste numa regra de três simples e direta, pois a taxa 5 corresponde à razão $\frac{5}{100}$.

Temos, assim: a 100 corresponde ... 5,
a 208 corresponderá ... x.

Donde a proporção:

$$\frac{100}{208} = \frac{5}{x} \therefore x = \frac{208 \times 5}{100} = \text{Cr\$ } 10{,}40.$$

Resp.: 5% de Cr\$ 208,00 são Cr\$ 10,40.

2.º) *Ao pagar uma conta de Cr\$ 4 800,00, uma pessoa consegue um abatimento de 3%. Quanto pagou pela conta?*

Temos a regra de três:

em 100 abate-se 3,
em 4 800 abater-se-á ..... x.

Daí, a proporção:

$$\frac{100}{4\,800} = \frac{3}{x} \therefore x = \frac{4\,800 \times 3}{100} = \text{Cr\$ } 144{,}00.$$

O abatimento é de Cr\$ 144,00, logo, a pessoa pagou

$$4\,800 - 144 = \text{Cr\$ } 4\,656{,}00.$$

Dos dois exemplos estudados conclui-se a regra prática para o cálculo da percentagem:

> **A percentagem é obtida multiplicando o principal pela taxa e dividindo o produto por 100.**

Esta regra prática é traduzida pela fórmula:

$$p = \frac{P \times i}{100}$$

onde P é o principal, i a taxa e p a percentagem.

Realmente, sendo i a taxa, P o principal e p a percentagem, temos a regra de três:

a 100 corresponde .... i.
a P corresponderá... p.

Armando a proporção:

$$\frac{100}{P} = \frac{i}{p} \therefore p = \frac{P \times i}{100}.$$

Exemplo: *Calcular 5% de Cr$ 840,00.*

Multiplicando o principal pela taxa 5 obteremos 4 200 e, dividindo o resultado por 100, temos:

4 200 : 100 = Cr$ 42,00.

35. Cálculo do principal e da taxa. Em certos problemas, a incógnita pode ser o *principal* ou a *taxa*. A resolução do problema far-se-á sempre por intermédio de uma *regra de três*. Exemplos:

a) *Cálculo do principal.*

Um menino, comprando um brinquedo, conseguiu um abatimento de 3% sôbre o preço marcado, e assim obteve um desconto de Cr$ 180,00. Qual o preço marcado?

Resolução. A incógnita é o principal, temos a regra de três:

em 100 o abatimento é 3
em P o abatimento será.. 180.

Daí, a proporção:

$$\frac{100}{P} = \frac{3}{180}$$

donde:

$$P = \frac{180 \times 100}{3} = 6\,000{,}00$$

Resp.: O preço marcado é Cr$ 6 000,00

b) *Cálculo da taxa.*

Em 35g duma solução de iôdo, a porção de iôdo pesa 0,7g. Qual a taxa percentual da solução?

Resolução. A incógnita é a taxa i. Temos a regra de três:

em 35g há......... 0,7g de iôdo
em 100g haverá .... i.

Daí, a proporção:

$$\frac{35}{100} = \frac{0{,}7}{i}$$

donde resulta $$i = \frac{0{,}7 \times 100}{35} = \frac{70}{35} = 2.$$

Resp.: A solução tem 2% de iôdo.

36. Principal aumentado ou diminuído da percentagem.

Primeiro caso: *Dada a soma* $P+p=S$. Exemplo:

Um negociante revende uma mercadoria por Cr$ 432,00, obtendo um lucro de 20% sôbre o preço de compra. Qual o preço de compra e qual o lucro?

RESOLUÇÃO. O principal (P) é o preço de compra e o lucro é a percentagem (p) sôbre êsse mesmo preço.

De acôrdo com a taxa fornecida, conclui-se que em 100 o negociante lucra 20 e, portanto, a soma correspondente será 120.

Podemos, então, dispor os dados e as incógnitas do seguinte modo:

P	p	S
100	20	120
x	y	432

Para determinar o principal (preço de compra), temos a regra de três:

$$\begin{matrix} 100 & \text{———} & 120 \\ x & \text{———} & 432 \end{matrix} \quad \therefore x = \frac{432 \times 100}{120} = 360.$$

Para determinar a percentagem (lucro), temos a regra de três:

$$\begin{matrix} 20 & \text{———} & 120 \\ y & \text{———} & 432 \end{matrix} \quad \therefore y = \frac{432 \times 20}{120} = 72.$$

Segundo caso: *Dada a diferença* $P-p=D$. Exemplo:

Um número diminuído de seus 15% vale 612. Qual o número?

RESOLUÇÃO. De acôrdo com a taxa, em 100 diminuiremos 15; logo, a diferença será 85. Podemos, então, usar dispositivo análogo ao do caso anterior e escrever os dados da regra de três:

P	p	D
100	15	85
x	y	612

Como só é pedido o número, calcularemos apenas x, por intermédio da regra de três:

$$\begin{matrix} 100 & \text{———} & 85 \\ x & \text{———} & 612 \end{matrix} \quad \therefore x = \frac{612 \times 100}{85} = 720.$$

Resp.: O número é 720.

EXERCÍCIOS

I) Exprima sob a forma de percentagem as razões:

1. 1/25 *Resp.:* 4%.
2. 3/4. *Resp.:* 75%.
3. 11/40. *Resp.:* 27,5%.
4. 31/125. *Resp.:* 24,8%.

II) Exprima, sob forma de fração irredutível, as percentagens:

5. 12%. *Resp.:* 3/25.
6. 30%. *Resp.:* 3/10.
7. 4,5%. *Resp.:* 9/200.
8. 24,8%. *Resp.:* 31/125.
9. 8‰. *Resp.:* 1/125.

III) Calcule as seguintes percentagens:

10. 8% de 175. *Resp.:* 14.
11. 67% de 386. *Resp.:* 258,62.
12. 0,2% de 938. *Resp.:* 1.876.
13. 8 1/3% de 600. *Resp.:* 50.
14. 16% de 27,86. *Resp.:* 4,457 6.
15. 12% de Cr$ 600,00. *Resp.:* Cr$ 72,00.
16. 6% de Cr$ 1 800,00. *Resp.:* Cr$ 108,00.
17. 8 % de 600. *Resp.:* 48.
18. 2 ‰ de 200g. *Resp.:* 4dg.
19. 5 ‰ de 500g. *Resp.:* 2,5g.
20. 3 ‰ de 145g. *Resp.:* 435mg.

IV) Resolva:

21. Qual o número cujos 18% valem 108? *Resp.:* 600.
22. Qual o número cujos 43% valem 374,1? *Resp.:* 870.
23. Qual o número cujos 25‰ valem 146? *Resp.:* 5 840.
24. Uma pessoa compra um terreno por Cr$ 175 000,00 e vende-o com lucro de Cr$ 35 000,00. Qual a percentagem do lucro? *Resp.:* 20%.
25. Qual o número que aumentado de seus 20% dá a soma 432? *Resp.:* 360.
26. Um viajante comercial recebe de comissão 4% das vendas que realiza. Em um mês recebeu de comissão Cr$ 58 000,00; quanto vendeu nesse mês? *Resp.:* Cr$ 1 450 000,00.
27. Em uma fábrica 28% dos operários são mulheres, e os homens são 216. Quantos são os operários? *Resp.:* 300.
28. Um comerciante compra 310 toneladas de minério a Cr$ 4 500,00 a tonelada. Vende um quinto com lucro de 25%, dois quintos com lucro de 15% e o resto com lucro de 10%. Quanto recebe ao todo e qual o seu lucro? *Resp.:* Cr$ 1 604 250,00; Cr$ 209 250,00.
29. Uma conta, ao ser paga à vista, sofre um abatimento de 5% no valor de Cr$ 200,00. Qual o valor da conta? *Resp.:* Cr$ 4 000,00.
30. Qual o valor de uma fatura pela qual se pagou Cr$ 1 900,00 sabendo-se que o vendedor concordou em fazer um abatimento de 5%? *Resp.:* Cr$ 2 000,00.
31. Um agente de motores adquire os mesmos por Cr$ 18 000,00 e paga a taxa alfandegária de 15%. Devendo dar ao vendedor uma comissão de 10% sôbre o preço de tabela, por quanto deve tabelar para ganhar 30% sôbre o mesmo preço? *Resp.:* Cr$ 34 500,00.
32. Uma pessoa revende um apartamento por Cr$ 425 500,00, lucrando 15%. Por quanto havia comprado o apartamento? *Resp.:* Cr$ 370 000,00.
33. Revende-se um objeto por Cr$ 264,00, com prejuízo de 4%. Qual o preço de custo? A quanto monta o prejuízo? *Resp.:* Cr$ 275,00.
34. Uma pessoa compra uma propriedade por Cr$ 300 000,00. Paga de taxa, comissões e escritura Cr$ 72 000,00. Por quanto deve revendê-la para lucrar 12%? *Resp.:* Cr$ 416 640,00.
35. Um número diminuído de seus 27% vale 365. Qual o número? *Resp.:* 500.
36. Um número aumentado de seus 18% vale 5 310. Qual o número? *Resp.:* 4 500.
37. Cr$ 72,00 quantos por cento são de Cr$ 600,00? *Resp.:* 12%.
38. Qual o número que, aumentado de seus 28%, vale 3 840? *Resp.:* 3 000.
39. Qual o número que, diminuído de seus 28%, vale 126. *Resp.:* 175.

40. Uma pessoa ganha em uma transação 3/5 da quantia empregada. De quantos por cento foi o lucro? *Resp.:* 60%.
41. A percentagem de 36% sôbre um valor, que fração é dêsse mesmo valor? *Resp.:* 9/25.
42. Qual a taxa que, aplicada sôbre Cr$ 1 800,00, dá a percentagem de Cr$ 108,00? *Resp.:* 6%.
43. Inscreveram-se em um concurso 1 480 candidatos. Foram reprovados 35%. Qual o número de aprovados? *Resp.:* 962.
44. Uma conta ao ser paga à vista, sofre um abatimento de 3% no valor de Cr$ 990,00. Qual o valor da conta? *Resp.:* Cr$ 33 000,00.
45. Um negociante em falência paga 40% de suas dívidas aos credores. Quanto deverá receber um credor de Cr$ 2 350,00? *Resp.:* Cr$ 940,00.
46. Uma fatura de Cr$ 840,00 sofre um desconto de 7% ao ser paga à vista. A quanto se reduz a fatura? *Resp.:* Cr$ 781,20.
47. Uma pessoa compra uma propriedade por Cr$ 300 000,00. Gasta com escritura e outras despesas Cr$ 27 000,00. Por quanto deve revendê-la para obter um lucro de 12% sôbre o capital empregado? *Resp.:* Cr$ 366 240,00.
48. Em um colégio, 28% dos alunos são meninas e os meninso são 1 008. Quantos alunos tem ao todo o colégio? *Resp.:* 1 400.
49. Uma betoneira, depois de trabalhar na construção de um edifício, sofre uma depreciação de 27% de seu valor e é, então, avaliada em Cr$ 36 500,00. Qual o valor primitivo? *Resp.:* Cr$ 50 000,00.
50. Uma pessoa compra um apartamento por Cr$ 1 700 000,00 e o revende com o lucro de 15% sôbre o preço de venda. Calcular o preço de venda. *Resp.:* Cr$ 2 000 000,00.

VII — JUROS SIMPLES

37. Definições. Uma pessoa possuidora de certa quantia, cedendo-a em benefício de outra, por empréstimo, ou depositando-a num banco, recebe, pela aplicação de seu dinheiro, uma remuneração denominada ***juro.***

Nessas transações há *quatro* quantidades a considerar:

capital — a quantia aplicada ou emprestada;
juro — a remuneração recebida pelo capital;
tempo — prazo de duração da transação;
taxa — que traduz as condições da transação.

A taxa estabelece o juro de uma quantia determinada, num tempo também determinado, e é, em geral, dada sob a forma de percentagem. Assim, a taxa 30% ao ano estabelece que o capital 100 produz 30 em 1 ano; com esta taxa, cem cruzeiros produzirão trinta cruzeiros em um ano.

Os prazos podem ser estabelecidos em anos, meses ou dias.

Convenciona-se considerar o prazo de um ano quando não é indicado explìcitamente; assim, enunciada simplesmente a taxa de 4 ½%, subentende-se 4 ½% ao ano.

38. Juros simples e compostos. Os juros são compostos, quando, no fim de cada prazo, são reunidos ao capital, sendo o juro do prazo seguinte contado sôbre o capital assim acrescido.

Quando o capital permanece invariável o juro é simples.

39. Cálculo de juros simples. Por convenção, os juros são diretamente proporcionais ao capital e ao tempo; dêsse modo, o cálculo dos juros se reduz à resolução de uma regra de três composta. Exemplo:

Calcular o juro produzido por ***Cr$ 900,00*** *no fim de* ***4 anos****, à taxa de* ***6% ao ano.***

Temos a regra de três:

O capital 100 em 1 ano produz 6,
capital 900 em 4 anos produzirá x.

donde
$$\frac{x}{6} = \frac{4}{1} \times \frac{900}{100} \text{ e } x = \text{Cr\$ } 216{,}00.$$

40. Fórmula de juros simples. Os problemas de juros são pràticamente resolvidos por uma fórmula, de emprêgo muito simples. Para obter essa fórmula, representemos, de modo geral, por c o capital empregado, i a taxa, t o tempo em anos, j o juro produzido. O problema será, então, enunciado

Calcular o juro produzido pelo capital c a i% ao ano, em t anos.

Teremos a regra de três:

o capital 100 em 1 ano produz i,
o capital c em t anos produzirá j.

Sendo j a incógnita, diretamente proporcional ao tempo e ao capital, obteremos:

$$\frac{j}{i} = \frac{c}{100} \times \frac{t}{1}$$

donde

$$\boxed{j = \frac{cit}{100}}$$

que é a fórmula de juros simples.

Aplicação. ***Calcular o juro de Cr$ 1 200,00 em 2 anos, a 5% ao ano.***

Temos: $c = 1\,200$, $t = 2$ e $i = 5$.

Aplicando a fórmula:

$$j = \frac{1\,200 \times 5 \times 2}{100} = 120.$$

O juro é de Cr$ 120,00.

Observação importante. Na aplicação da fórmula a taxa e o tempo devem ser referidos à mesma unidade. Assim:

a taxa sendo *ao ano,* o tempo deve ser reduzido à unidade *ano;*

a taxa sendo *ao mês,* o tempo deve ser reduzido a *mês.* Exemplo:

Calcular o juro produzido pelo capital ***Cr$ 900,00****, a* ***8% ao ano****, no fim de* ***3 anos*** *e* ***9 meses.***

A taxa é anual, o tempo deve ser reduzido a anos.

Temos: 3 anos 9 meses $= \frac{3 \times 12 + 9}{12} = \frac{45}{12}$.

Aplicando a fórmula do juro, resulta:

$$j = \frac{900 \times 8 \times \frac{45}{12}}{100} = \frac{9 \times {}^{2}\!\not{8} \times 45}{\not{12}_{3}} = \text{Cr\$ } 270{,}00.$$

41. Problemas. Os problemas de juros são de quatro tipos:

a) calcular o *juro*, conhecidos o capital, a taxa e o tempo; problema do tipo dos exemplos anteriores;

b) calcular o *capital*, conhecidos o juro, a taxa e o tempo;

c) calcular o *tempo*, conhecidos o capital, a taxa e o juro;

d) calcular a *taxa*, conhecidos o capital, o tempo e o juro.

Da fórmula para o cálculo do juro podem ser deduzidas fórmulas particulares para o cálculo do *capital*, da *taxa* e do *tempo*. Realmente, dada a fórmula:

$$j = \frac{cit}{100}$$

obtemos, eliminando o denominador:

$$cit = 100j;$$

donde, tirando sucessivamente os valores de c, t e i:

$$c = \frac{100j}{it}$$

$$t = \frac{100j}{ci}$$

$$i = \frac{100j}{ct}$$

a) ***Cálculo do capital.***

Calcular o capital que, em ***3 anos****, rendeu* ***Cr$ 270,00****, a* ***5%*** ***ao ano.***

Empregando a fórmula do capital, temos:

$$c = \frac{100 \times 270}{5 \times 3} = \frac{27\,000}{15} = 1\,800$$

Resp.: O capital é de Cr$ 1 800,00.

b) ***Cálculo do tempo.***

O capital ***Cr$ 900,00****, empregado a* ***8% ao ano****, rendeu* ***Cr$ 216,00*** *de juro. Durante quanto tempo esteve empregado?*

Empregando a fórmula do tempo:

$$t = \frac{100 \times 216}{900 \times 8} = \frac{216}{72} = 3$$

Resp.: Estêve empregado durante 3 anos.

c) ***Cálculo da taxa.***

A que taxa deve ser empregado o capital ***Cr$ 2 000,00*** *para produzir* ***Cr$ 280,00*** *em* ***2 anos?***

Empregando a fórmula da taxa:

$$i = \frac{100 \times 280}{2\,000 \times 2} = \frac{28}{4} = 7.$$

Resp.: A taxa deve ser de 7% ao ano.

42. Capital acumulado ou montante (*M*). A soma dum capital com o juro correspondente denomina-se *capital acumulado* ou *montante*.

Em certos problemas são dados o capital acumulado, a taxa e o tempo e pedido o capital ou o juro.
Exemplo:

Sendo ***Cr$ 2 540,00*** *o capital acumulado no fim de* ***três anos****, a* ***9% ao ano****, calcular o juro e o capital.*

Resolução. Seja x o capital. O juro dêsse capital em 3 anos, a 9% ao ano, será:

$$\frac{27x}{100}$$

O montante é, então: $x + \dfrac{27x}{100}$.

Como êsse montante vale Cr$ 2 540,00, resulta a equação:

$$x + \frac{27x}{100} = 2\,540$$

Resolvendo-a, teremos, sucessivamente:

$$100x + 27x = 254\,000$$

donde

$$x = 2\,000$$

o capital é de Cr$ 2 000,00

e o juro: Cr$ 2 540,00 − Cr$ 2 000,00 = Cr$ 540,00

EXERCÍCIOS

1. Qual o juro produzido por Cr$ 14 000,00 em 3 anos, a 5% ao ano? *Resp.:* Cr$ 2 100,00.
2. Qual o juro de Cr$ 16 000,00, em dois anos e três meses, a 7% ao ano? *Resp.:* Cr$ 2 520,00.
3. Calcular o juro de Cr$2 700,00, a 8% ao ano, em 3anos e 4 meses. *Resp.:* Cr$ 720,00.
4. Calcular o juro produzido por Cr$ 900,00 em 1a 5m 20d a 0,8% ao mês. *Resp.:* Cr$ 127,20.
5. Calcular o juro de Cr$ 264,00 em 9 meses a 7% ao ano. *Resp.:* Cr$ 13,86.
6. Qual o capital que produz Cr$ 400,00 de juro em 1a 8m, à taxa de 1% ao mês? *Resp.:* Cr$ 2 000,00.
7. A que taxa deve ser empregado o capital de Cr$ 16 000,00, para produzir Cr$ 2 520,00 em 2a 3m? *Resp.:* 7% ao ano.
8. O capital de Cr$ 6 000,00, empregado a 9% ao ano, produziu Cr$ 810,00 de juro. Durante quanto tempo estêve empregado? *Resp.:* 1 a 6m.
9. Uma pessoa adquire um automóvel por Cr$ 180 000,00. O vendedor oferece um abatimento de 5% pelo pagamento à vista. A pessoa prefere, no entanto, pagar em duas prestações iguais: a primeira 6 meses depois da compra, e a outra 1 ano depois, submetendo-se ao pagamento do juro de 7% ao ano. Quanto gastou a mais, adotando o pagamento em prestações? *Resp.:* Cr$ 18 450,00.
10. Certo capital, colocado a juro durante 3a 4m a 8% ao ano produziu Cr$ 720,00 de juro. Qual o capital? *Resp.:* Cr$ 2 700,00.

11. O capital de Cr$ 900,00, empregado a 0,8% ao mês, produziu Cr$ 127,20 de juro. Durante quanto tempo estêve empregado? *Resp.:* 1a 5m 20d.
12. Calcular o juro de Cr$ 800,00 em 90 dias, à taxa de 9% ao ano. *Resp.:* Cr$ 18,00.
13. A que taxa estêve empregado um capital de Cr$ 500,00, para produzir Cr$ 3,75 em 30 dias? *Resp.:* 9%.
14. Qual o prazo de aplicação de um capital de Cr$ 1 440,00 que produziu Cr$ 18,00 de juro, à taxa de 10%? *Resp.:* 45 dias.
15. Qual o capital que, empregado durante 72 dias à taxa de 6%, produziu Cr$ 300,00 de juro? *Resp.:* Cr$ 25 000,00.
16. Qual o tempo necessário para que um capital, colocado a 5%, dobre de valor? *Resp.:* 20 anos.
17. Qual o capital que, colocado a 6 %, produz um montante de Cr$ 100 000,00 no fim de 15 anos? *Resp.:* Cr$ 52 631,58.
18. Qual o montante de Cr$ 100 000,00 no fim de 10 anos à taxa de 5,5%? *Resp.:* Cr$ 155 000,00.
19. Qual a taxa a que estêve empregado o capital de Cr$ 24 750,00, se ao fim de 60 dias produziu o montante de Cr$ 24 997,50? *Resp.:* 6%.
20. Uma pessoa deposita suas economias no valor de Cr$ 13 000,00 numa caixa que paga 5% ao ano. Qual o capital acumulado em 5 anos? *Resp.:* Cr$ 16 250,00.
21. Qual o juro correspondente a um capital que, empregado a 6% ao ano, atinge o valor de Cr$ 4 480,00 no fim de dois anos? *Resp.:* Cr$ 480,00.
22. Uma pessoa emprega seu capital a 8% e, no fim de 3a 8m, recebe capital e juro reunidos no valor de Cr$ 15 520,00. Qual o capital empregado? *Resp.:* Cr$ 12 000,00.
23. Calcular o juro de Cr$ 720,00 a 5% ao ano, em 2m 15d. *Resp.:* Cr$ 7,50.
24. Calcular o juro de Cr$ 720,00 em 35 dias à taxa de 8%. *Resp.:* Cr$ 5,60.
25. Durante quanto tempo estêve empregada a quantia de Cr$ 1 000,00 para produzir Cr$ 25,00 de juro, à taxa de 6% ao ano? *Resp.:* 5 meses.
26. Qual o capital que, colocado a 8% ao ano durante 5 meses, produz Cr$ 27,50 de juro? *Resp.:* Cr$ 825,00.
27. O capital de Cr$ 3 600,00, depositado durante 30 dias, produziu Cr$ 24,00 de juros. Qual a taxa? *Resp.:* 8%.
28. Que montante dá o capital de Cr$ 8 000,00 em 3 meses, à taxa de 8%? *Resp.:* Cr$ 8 160,00.

29. Qual o capital que, a 8%, produz em três meses o montante de Cr$ 8 670,00? *Resp.:* Cr$ 8 500,00.
30. Em quanto importam os juros incluídos no montante de Cr$ 8 346,00 em 6 meses, a 8%? *Resp.:* Cr$ 321,00.
31. A que taxa foi empregado um capital que produziu o montante de Cr$ 8 670,00 em 90 dias, sendo o juro de Cr$ 170,00? *Resp.:* 8%.
32. Qual a taxa em que um capital duplica de valor em 20 anos? *Resp.:* 5%.
33. No fim de quanto tempo um capital qualquer aplicado a 5%, triplica de valor? *Resp.:* 40 anos.
34. Uma pessoa coloca um capital a 4%. No fim de 3 anos retira capital e juros e coloca o montante a 5%; ao cabo de dois anos o novo montante é de Cr$ 6 160,00. Qual o capital? *Resp.:* Cr$ 5 000,00.
35. Uma pessoa deposita suas economias no valor de Cr$ 13 000,00, numa caixa que paga 5% ao ano. Qual o capital acumulado em 5 anos? *Resp.:* Cr$ 16 250,00.

UNIDADE II

Geometria plana

Figuras Geométricas Planas. Reta e Círculo

I — PROPOSIÇÕES. RETA E PLANO. CONGRUÊNCIA

1. Geometria dedutiva. *Geometria dedutiva* é a parte da matemática que estuda as propriedades das figuras e as relações que guardam entre si, partindo de um certo número de *noções e propriedades*, chamadas *primárias* ou *primitivas*, por meio de um encadeamento lógico de raciocínios rigorosos denominados ***demonstração.***

O enunciado das propriedades é emitido sob forma de *proposição*. Chama-se *proposição* a uma afirmação ou a um conjunto de afirmações.

2. Proposições geométricas. As principais espécies de proposições geométricas são:

a) ***Definição*** é a substituição de um conjunto de conceitos, já conhecidos, por um novo conceito. O conceito novo é o *definido.*

Assim, quando dizemos: *retângulo é o paralelogramo que tem os ângulos retos*, o definido é retângulo (conceito novo).

b) ***Postulado*** é a proposição que não decorre de outra e que se aceita sem demonstração. Exemplo:

Dois pontos determinam uma reta.

c) ***Teorema*** é a proposição que decorre de outras, por intermédio de uma demonstração.

d) ***Lema*** é um princípio que serve de base à demonstração de um teorema.

e) ***Corolário*** ou ***conseqüência.*** Um teorema que se conclui imediatamente de outro, chama-se *corolário* ou *conseqüência* dêsse outro.

3. Hipótese. Tese. Demonstração. O enunciado de um teorema compreende duas partes distintas: a *hipótese* e a *tese* ou *conclusão*.

Hipótese é o conjunto de condições aceitas como verdadeiras.

Tese é a verdade que se pretende demonstrar. Exemplo:

Suponhamos a proposição: *dois ângulos retos são iguais.*

A hipótese é que os dois ângulos são retos e a tese é que são iguais.

O enunciado de um teorema pode ser esquematizado dêste modo:

Hipótese DOIS ÂNGULOS SÃO RETOS.	→	*T e s e* ÊSTES ÂNGULOS SÃO IGUAIS.

O símbolo → significa: *conduz a, acarreta, implica em* — ou o conetivo *se, então.*

O raciocínio, que permite *concluir* o estabelecido na tese, supondo preenchidas as condições da hipótese, chama-se ***demonstração.***

4. Relações entre as proposições. Duas proposições são ***recíprocas*** quando a segunda tem por hipótese a tese da primeira e por tese a hipótese da primeira.

Para distinguir uma proposição de sua recíproca, diremos *proposição direta.*

Observemos que a recíproca de uma propriedade verdadeira pode ser falsa. Assim, *todos os ângulos retos são iguais; mas, todos os ângulos iguais não são necessàriamente retos.*

A proposição direta é verdadeira e a recíproca é falsa.

Duas proposições são ***contrárias,*** quando uma delas tem, ao mesmo tempo, hipótese contrária e tese contrária à da outra.

Duas proposições são ***contraditórias,*** quando têm a mesma hipótese e conclusões contrárias. Exemplo:

Pr. direta: Todo ponto da bissetriz de um ângulo é eqüidistante dos lados;

Pr. recíproca: Todo ponto eqüidistante dos lados é da bissetriz;

Pr. contrária: Todo ponto fora da bissetriz não é eqüidistante dos lados;

Pr. contraditória: Todo ponto da bissetriz não é eqüidistante dos lados.

5. Noções primárias. Admitimos as noções de volume, superfície, linha e ponto e as de forma e extensão, como noções primitivas, isto é, que se admitem sem definição.

6. Linha reta. A linha reta não se define. É uma noção primária.

7. Postulados da reta.

1.º) Tôda reta pode ser levada a coincidir com outra, de modo que um ponto qualquer da primeira coincida com qualquer ponto da segunda.

2.º) Dois pontos determinam uma reta, isto é, por dois pontos dados é sempre possível traçar uma linha reta, e sòmente uma.

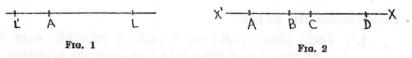
Dêstes postulados resultam, imediatamente, as conseqüências:

1.ª) *Duas retas distintas não podem ter dois pontos comuns.*

2.ª) *Duas retas distintas, ou não se encontram, ou se encontram num só ponto.*

8. Semi-reta. Segmento. Qualquer ponto de uma reta, a divide em duas semi-retas como AL e AL' (fig. 1).

A *semi-reta* é ilimitada num sentido e limitada no outro. O ponto A, que limita a semi-reta AL' denomina-se *origem.*

FIG. 1 FIG. 2

O conjunto dos pontos de uma reta, compreendidos entre dois de seus pontos e êsses dois pontos, como AB na fig. 2, denomina-se ***segmento retilíneo*** ou apenas *segmento.* Os pontos A e B chamam-se ***extremos.*** O segmento é limitado.

Suporte de uma semi-reta ou de um segmento é a reta que contém o segmento ou a semi-reta. Assim, na figura 1, LL' é o suporte das semi-retas AL e AL'; e, na figura 2, $X'X$ é o suporte dos segmentos AB e CD.

Semi-retas opostas são duas semi-retas distintas, que têm a mesma origem e o mesmo suporte, como AL e AL', na figura 1. Cada uma diz-se o *prolongamento* da outra.

Segmentos colineares são dois ou mais segmentos que têm o mesmo suporte, como AB e CD na figura 2.

Fig. 3

Segmentos consecutivos são segmentos tais que a origem de cada um coincide com a extremidade do precedente. Na figura 2 os segmentos AB, BC e CD são consecutivos e colineares. Na figura 3 os segmentos AB, BC e CD são consecutivos e não colineares.

9. Postulado do segmento.

> **O segmento retilíneo é a menor linha que se pode traçar entre dois pontos.**

Isto é, admitimos que o segmento é a mais curta distância entre dois pontos.

10. Plano. Semi-plano. Postulados do plano.

Superfície plana ou ***plano***. A noção de superfície plana ou plano é primitiva.

Postulados do plano.

1.º) Todo plano pode ser levado a coincidir com outro de modo que uma reta qualquer do primeiro coincida com qualquer reta do outro.

2.º) O plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços e uma reta não pode passar de uma a outra região sem atravessar o plano.

3.º) Três pontos, não em linha reta, determinam um plano, isto é, por três pontos não situados na mesma reta, passa um plano, e sòmente um.

4.º) Tôda reta que tem dois pontos num plano, fica inteiramente contida nêle, como AB na figura 4.

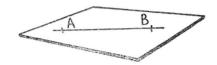



Fig. 4

Semi-plano é cada uma das regiões em que um plano fica dividido por uma reta (fig. 4).

11. Figuras geométricas. Um conjunto qualquer de pontos denomina-se *figura*.

A figura, cujos pontos estão todos situados no mesmo plano, diz-se ser uma *figura plana*. Em caso contrário, denomina-se *não plana* ou *reversa*.

12. Congruência. A noção de deslocamento de uma figura indeformável é fundamental em geometria. Esta noção se origina na noção experimental de corpo sólido. É, no entanto, aceita em geometria dedutiva, mediante o postulado:

> **Uma figura pode ocupar, no espaço, uma infinidade de posições, sem mudar de forma nem de grandeza.**

Duas figuras são denominadas ***congruentes***, quando podem coincidir por um deslocamento.

Os deslocamentos são de três tipos.

I. Translação. Diz-se que uma figura se desloca por translação, quando todos os seus pontos percorrem segmentos iguais e da mesma direção, como indica a figura 5, em que se supõe o deslocamento de um triângulo da posição ABC para a posição $A'B'C'$.

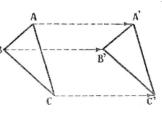
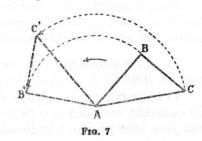



Fig. 5

II. Rotação em tôrno de um centro. Quando uma figura se desloca de modo que um de seus pontos fica fixo, como o ponto A na figura 7, diz-se que faz rotação em tôrno dêsse ponto que se denomina *centro de rotação.*

Na figura 7, supõe-se a rotação do triângulo ABC em tôrno do centro A, para ocupar a posição $AB'C'$.

Fig. 6

Fig. 7

III. Rotação em tôrno de um eixo. Quando uma figura se desloca de modo que dois de seus pontos ficam fixos, êstes determinam uma reta que se denomina *eixo de rotação,* e diz-se que a figura se desloca pela rotação em tôrno dêsse eixo.

Na figura 6, supõe-se a rotação do triângulo ABC em tôrno do eixo BC, para ocupar a posição $A'BC$.

Na rotação em tôrno de um eixo, observa-se que a figura ocupa posições em uma infinidade de planos intermediários até ocupar a posição final $A'BC$.

Assim, apenas os dois primeiros tipos são deslocamentos no plano. Todavia, em geometria plana, utiliza-se, também, o terceiro deslocamento, embora deva ser evitado.

EXERCÍCIOS

Dizer a hipótese e a tese das seguintes proposições, formar as recíprocas e escrever a hipótese e a tese em linguagem matemática.

1. **Se os lados de dois ângulos agudos forem paralelos, os ângulos serão iguais.**

2. **Se dois ângulos de um triângulo forem iguais, os lados a êles opostos serão também iguais.**
3. **Se um ponto estiver na bissetriz de um ângulo, será equidistante dos lados.**
4. **Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.**
5. **Dois ângulos retos são iguais.**
6. **No triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.**
7. **O paralelogramo tem os lados opostos iguais.**
8. **No triângulo retângulo, os ângulos agudos são complementares.**
9. **Dois triângulos que têm os três lados respectivamente iguais, são iguais.**
10. **Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.**
11. **Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.**
12. **O paralelogramo que tem as diagonais iguais é um retângulo.**
13. **Os segmentos das tangentes à circunferência, traçados do mesmo ponto, são iguais.**
14. **As diagonais do losango são perpendiculares.**
15. **Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.**

II — ÂNGULOS

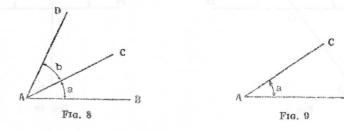
13. Definições.

Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum (fig. 9).

As duas semi-retas que formam o ângulo são os ***lados,*** a origem comum é o ***vértice.***

O ângulo é indicado de três maneiras:

1.ª) por três letras, colocando-se a do vértice como intermediária: $\widehat{BAC}$ (fig. 8);

Fig. 8 Fig. 9

2.ª) apenas pela letra do vértice, quando não acarreta confusão: Â ou $\angle A$ (fig. 9).

3.ª) por uma letra minúscula colocada em seu interior: ângulo a.

Ângulos adjacentes são dois ângulos que têm o mesmo vértice e um lado comum situado entre lados não comuns, como a e b na figura 8.

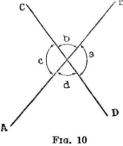
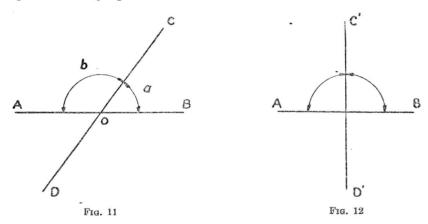



Fig. 10

Ângulos opostos pelo vértice são dois ângulos tais que os lados de qualquer dêles são semi-retas opostas aos lados do outro (a e c na fig. 10 ou b e d).

Retas perpendiculares e oblíquas. Duas retas concorrentes formam *quatro* ângulos (fig. 11). Dois quaisquer dêsses ângulos ou são adjacentes ou são opostos pelo vértice. Quando os ângulos adjacentes são iguais, as retas dizem-se *perpendiculares;* qualquer delas é *perpendicular* à outra. Quando êsses ângulos são desiguais, as retas dizem-se *oblíquas.* Na figura 11, AB é oblíqua a CD e, na figura 12, $C'D'$ é perpendicular a AB.

Semi-retas e segmentos perpendiculares. Duas semi-retas ou dois segmentos são perpendiculares quando os seus suportes são perpendiculares.

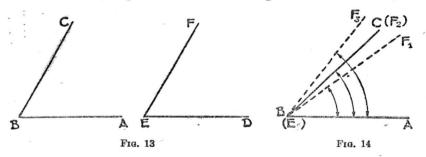
Fig. 11 Fig. 12

O ângulo formado por duas retas perpendiculares diz-se ***reto.*** O ângulo menor que o reto diz-se ***agudo*** e o maior, ***obtuso.***

Soma. Ângulos complementares, suplementares e replementares. *Adicionar* dois ângulos é deslocar um dêles de modo a torná-los adjacentes; *soma* é o ângulo formado pelos dois lados que não ficam em coincidência. Na figura 8 a soma dos ângulos a e b é $\widehat{BAD}$.

Dois ângulos são *complementares,* quando a soma dêles é igual a um reto; são *suplementares,* quando a soma é igual a dois retos e são *replementares,* quando a soma é igual a quatro retos.

14. Comparação de ângulos. Suponhamos os dois ângulos ABC e DEF (fig. 13).

Transportando o ângulo DEF de modo que a semi-reta ED coincida com BA e o ponto E com B, o lado EF ocupará uma das três posições indicadas na figura 14.

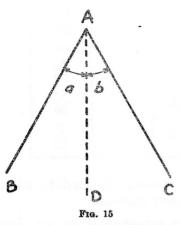
Fig. 13 Fig. 14

1.ª) A posição EF_1 no interior do ângulo ABC. Neste caso o ângulo DEF é menor que ABC e escrevemos:

$$\widehat{DEF} < \widehat{ABC}$$

2.ª) A posição EF_2 em coincidência com BC. Neste caso os dois ângulos são iguais e escrevemos:

$$\widehat{DEF} = \widehat{ABC}$$

Assim, dois ângulos são iguais quando, deslocando um dêles sôbre o outro, seus dois lados coincidem.

FIG. 15

3.ª) A posição EF_3 no exterior do ângulo BAC. Neste caso o ângulo DEF é maior que BAC e escrevemos:

$$\widehat{DEF} > \widehat{BAC}$$

15. Bissetriz. Bissetriz de um ângulo é a semi-reta traçada do vértice, e que o divide em dois ângulos adjacentes iguais.

Na figura 15, os ângulos a e b são iguais, a semi-reta AD é *bissetriz* do ângulo A.

16. Postulado do ângulo.

Todo ângulo tem bissetriz e apenas uma.

17. Propriedades.

Primeira propriedade:

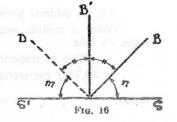
Por um ponto dado em um plano pode-se traçar uma perpendicular a uma reta e sòmente uma.

Primeiro caso. ***O ponto está sôbre a reta.*** Seja o ponto A da reta SS' (fig. 16).

DEMONSTRAÇÃO:

a) Tracemos a reta qualquer AB. Das duas uma: ou os ângulos BAS e BAS' são iguais, e AB é perpendicular a SS', ou os ângulos são desiguais. Neste caso, tracemos AD que forme com AS' um ângulo m igual a n e tracemos, ainda, a bissetriz AB' do ângulo BAD: os ângulos $B'AS$ e $B'AS'$ serão, então, iguais, por serem formados de partes iguais.

Há, pois, uma perpendicular.

FIG. 16

b) A perpendicular AB' é única porque o ângulo BAD tem uma única bissetriz.

Segundo caso. ***O ponto é exterior à reta.***

a) A perpendicular existe. Seja o ponto A e a reta $S'S$ (fig. 17).

Tracemos AB e BC formando com S ângulos iguais: $m = m'$. Tomemos: $BA' = BA$.

Tracemos finalmente a reta AA'. Se fizermos, então, rotação do semi-plano superior em tôrno da reta $S'S$, o ponto D ficará fixo, o segmento BA seguirá a direção de BA' e como são iguais o ponto A concidirá com A'. Assim: $A\hat{D}B = A'\hat{D}B$ e, por definição, AA' é perpendicular à reta $S'S$.

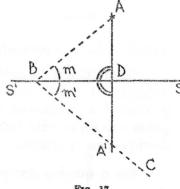



FIG. 17

b) A perpendicular é única. Realmente, qualquer linha ABA' que contenha A e A' e forme com S ângulos iguais não será reta, porque êsses pontos determinam *ùnicamente* a reta ADA' (2.º postulado da reta).

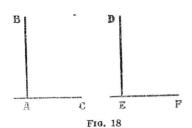
Segunda propriedade:

Todos os ângulos retos são iguais.

Sejam os dois ângulos retos BAC e DEF (fig. 18).

Hip.: $\begin{cases} BA \perp AC \\ DE \perp EF \end{cases}$ Tese: $\hat{A} = \hat{E}$.

DEMONSTRAÇÃO. Desloquemos o segundo ângulo sôbre o primeiro de modo que EF coincida com AC e o ponto E com o ponto A.

FIG. 18

A semi-reta ED tomará a direção de AB porque, pelo ponto E, em coincidência com A, só se pode traçar uma perpendicular a AC. Assim, os dois ângulos coincidem e são iguais.

Medida de ângulos. Unidade. A *unidade* de ângulo é o *ângulo reto*. Representa-se essa unidade pelo símbolo r.

Os múltiplos da unidade (ângulo reto) não têm designação própria. O único submúltiplo decimal que tem designação própria é a centésima parte da unidade, que se denomina *grado* e se representa pelo símbolo g ou gr quando possa haver dúvida com o grama.

Eis o quadro dos submúltiplos do ângulo reto.

NOME	SÍMBOLO	VALOR
ângulo reto...	*r*	1r
grado	*g* ou *gr*	0,01r
decigrado.....	*dgr*	0,001r
centigrado....	*cgr*	0,000 1r
miligrado.....	*mgr*	0,000 01r

Além do sistema decimal de medida dos ângulos é também legal o sistema complexo denominado *sexagesimal*.

A unidade dêsse sistema é o grau ou grau sexagesimal, ângulo eqüivalente a 1/90 de um ângulo reto, e cujo símbolo é °.

Os múltiplos não têm designação própria. Os submúltiplos são os constantes do quadro seguinte, onde os nomes *minuto* e *segundo* são empregados, quando não possa haver confusão com as unidades de tempo.

NOME	SÍMBOLO	VALOR
grau sexagesimal ou grau.....	°	$\frac{1r}{90}$
minuto de ângulo ou minuto..	′	$\frac{1°}{60}$
segundo de ângulo ou segundo	″	$\frac{1'}{60}$

É ainda legal um terceiro sistema de medida (sistema circular), cuja unidade denomina-se *radiano*.

PROBLEMA. *Dada a medida sexagesimal de um ângulo, achar a medida decimal e reciprocamente.*

No presente capítulo consideraremos apenas as transformações entre os sistemas decimal (*unidade o grado*) e o sexagesimal (*unidade o grau*). As transformações se fazem por intermédio de uma regra de três simples e direta, pois tem-se:

$$90° = 100g = 1r.$$

Exemplos:

1.°) *Do sexagesimal para o decimal.*

Obter a medida decimal de um ângulo de 18°25′. Temos a regra de três:

a 90° correspondem 100gr,
a 18°25′ corresponderão x gr,

ou, reduzindo os principais à mesma unidade:

$$5\,400' - 100gr$$
$$1\,105' - x \ gr$$

donde:
$$x = \frac{110\,500}{5\,400} = 20{,}462\,9gr.$$

2.°) *Do decimal para o sexagesimal.*

Obter a medida sexagesimal de um ângulo de 38,75 gr. Temos a regra de três.

a 100gr correspondem 90°,
a 38,75gr corresponderão x°,

donde:
$$x = \frac{9 \times 38{,}75}{10} = 34°{,}875.$$

Transformando o resultado em complexo obtemos:

$$x = 34°52'30''.$$

Terceira propriedade:

Dois ângulos adjacentes que têm os lados não comuns em linha reta são suplementares.

Hipótese: Sejam os ângulos m e n, cujos lados não comuns AC e AD estão em linha reta (fig. 19).

Tese: $m + n = 180°$.

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos, pelo ponto A, a perpendicular a CD, seja AE; temos:

$$m = 90° + EAB$$
$$n = 90° - EAB,$$

Fig. 19

somando, membro a membro, resulta:

$$m + n = 180°$$

CONSEQÜÊNCIAS:

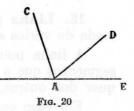
Primeira. ***Se um dos quatro ângulos, formados por duas retas concorrentes, fôr reto, os outros três também serão.***

Segunda. ***A soma dos ângulos formados em tôrno de um ponto e do mesmo lado de uma reta é 180°.***

Realmente, a soma dos ângulos BAC, CAD e DAE (fig. 20) é eqüivalente à soma dos dois ângulos adjacentes BAD e DAE.

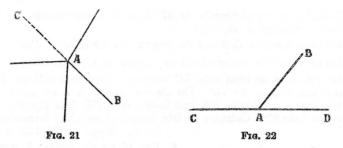
Terceira. ***A soma dos ângulos formados em tôrno do mesmo ponto e no mesmo plano é 360°.***

Realmente, a soma dos quatro ângulos formados em tôrno do ponto A (fig. 21) é eqüivalente à soma dos ângulos situados dum lado e doutro da reta BC. Como a soma dos ângulos de cada lado da reta BC é igual a 180°, a soma total será 360°.

Fig. 20

Recíproca.

Se dois ângulos adjacentes são suplementares, os lados não comuns estão em linha reta.

Sejam BAC e BAD dois ângulos adjacentes e suplementares (fig. 22).

Fig. 21 Fig. 22

Prolongando CA obteremos um ângulo que é suplemento de BAC em virtude da terceira propriedade, e, portanto, igual a BAD. Assim, o prolongamento de CA confunde-se com AD, o que demonstra a recíproca.

APLICAÇÃO. ***Para se obter o suplemento dum ângulo menor que 180°, prolonga-se um de seus lados.***

Quarta propriedade:

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Sejam a e b dois ângulos opostos pelo vértice (fig. 23).

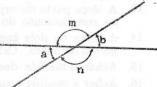
Tese: $a = b$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$a + m = 180°$$
$$b + m = 180°$$

Subtraindo membro a membro:

$$a - b = 0 \text{ ou } a = b.$$

Fig. 23

EXERCÍCIOS

1. Calcular o complemento do ângulo de 35°42′. *Resp.:* 54°18′.
2. Calcular o suplemento do ângulo de 73°13′2″. *Resp.:* 106°46′58″.
3. Dado um ângulo x, representar o complemento, o suplemento e um têrço do complemento. *Resp.:* $90° - x$, $180° - x$ e $\frac{90° - x}{3}$.
4. Calcular o complemento de 37,45 gr e o suplemento de 107,345gr. *Resp.:* 62,55gr e 92,655gr.
5. Achar a medida decimal do ângulo de 30°18′30″. *Resp.:* 33,676gr.
6. Achar a medida sexagesimal do ângulo de 18,45gr. *Resp.:* 16°36′18″.
7. Do ponto A de uma reta BC traça-se a semi-reta AD que forma com AB um ângulo de 73°. Do mesmo ponto A e no outro semiplano traça-se a semi-reta AE que forma com BC dois ângulos, cuja diferença é de 40°. Calcular os três ângulos incógnitos formados em tôrno de A. *Resp.:* 107°, 110° e 70°.

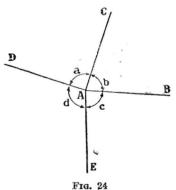



FIG. 24

8. Em tôrno do ponto A como vértice traçam-se quatro ângulos a, b, c e d (fig. 24). O ângulo b aumentado de 20° é igual a 1/3 da soma dos outros três. O ângulo a é reto. A diferença entre d e c é de 25°. Calcular os ângulos b, c e d. *Resp.:* 75°, 85° e 110°.
9. A soma de dois ângulos é 92,5gr e a diferença 48°26′. Calcular os ângulos. *Resp.:* 65°50′30″ e 17°24′30″.
10. O dôbro do complemento de um ângulo vale 84°17′36″. Achar o ângulo. *Resp.:* 47°51′12″.
11. Na figura 24 a soma dos ângulos c e d vale 195°. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes de a e b. *Resp.:* 82°30′.
12. Na figura 24 a soma dos ângulos c e d é 195°. O ângulo a excede o ângulo b de 15°. Calcular os ângulos a e b. *Resp.:* 90° e 75°.
13. A têrça parte do suplemento de um ângulo aumentada de 28° é igual ao complemento do mesmo ângulo. Calcular o ângulo. *Resp.:* 3°.
14. A soma de dois ângulos vale 125° e um dêles é a metade do suplemento do outro. Calcular os ângulos. *Resp.:* 70° e 55°.
15. Achar a medida decimal do ângulo de 15°26′. *Resp.:* 17,148gr.
16. Achar a medida sexagesimal do ângulo de 23,25gr. *Resp.:* 20°55′30″.
17. Um têrço do suplemento de um ângulo vale 38°26′45″. Calcular o ângulo. *Resp.:* 64°39′45″.

18. A diferença entre dois ângulos complementares é de 27°32′. Calcular os dois ângulos. *Resp.:* 58°46′ e 31°14′.
19. A diferença entre dois ângulos suplementares é de 40°. Calcular os dois ângulos. *Resp.:* 110° e 70°.
20. Calcular o ângulo que, diminuído de 20°, é igual ao triplo do seu suplemento. *Resp.:* 140°.
21. Calcular dois ângulos, cuja soma é 45°28′, sendo um dêles 1/5 do complemento do outro. *Resp.:* 34°20′ e 11°8′.
22. Qual o maior: o ângulo de 2dgr ou de 2′ ? *Resp.:* 2dgr.
23. Achar dois ângulos cuja soma é 96°20′, sabendo que um dêles é igual a um têrço do suplemento do outro. *Resp.:* 54°30′ e 41°50′.

Provar os teoremas:

24. Dois ângulos que têm o mesmo complemento ou o mesmo suplemento são iguais.
25. A perpendicular à bissetriz, traçada pelo vértice, forma ângulos iguais com os lados do ângulo.
26. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares são perpendiculares.
27. Do vértice de um ângulo traça-se uma semi-reta interior ao mesmo ângulo. Provar que o ângulo formado por essa semi-reta com a bissetriz é igual à semi-diferença dos ângulos que a mesma forma com os lados do ângulo dado.
28. Do vértice de um ângulo traça-se uma semi-reta exterior. Provar que o ângulo formado por essa semi-reta com a bissetriz é igual à semi-soma dos ângulos que a mesma forma com os lados do ângulo dado.
29. As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta.
30. Se as bissetrizes de dois ângulos adjacentes forem perpendiculares, os ângulos são suplementares.

III — POLÍGONOS

18. Linha poligonal. *Linha poligonal* é a linha formada de vários segmentos consecutivos e não colineares.

A linha poligonal diz-se ***convexa***, quando nenhum dos segmentos que a formam é atravessado pelo suporte de qualquer dos outros, como $ABCD$ na figura 25.

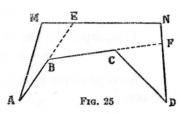
Em caso contrário diz-se ***não convexa***.

19. Propriedade das linhas poligonais.

> **Tôda linha poligonal convexa é menor que a envolvente das mesmas extremidades.**

Fig. 25

Sejam as poligonais da figura 25 que satisfazem as condições da hipótese.

Prolonguemos AB e BC até às intersecções respectivas E e F com a poligonal envolvente. AE e BF são segmentos retilíneos, logo, temos, em virtude do postulado dos segmentos:

$$AB + BE < AM + ME$$
$$BC + CF < BE + EN + NF$$
$$CD < CF + FD$$

Adicionando, membro a membro, e simplificando os têrmos comuns, vem:

$$AB + BC + CD < AM + ME + EN + NF + FD$$

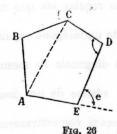
ou $$AB + BC + CD < AM + MN + ND$$

20. Polígono. *Polígono* é a figura formada por uma linha poligonal fechada (fig. 26). Os segmentos AB, BC... (fig. 26) são denominados *lados* do polígono e os pontos A, B, C..., *vértices*.

Fig. 26

Um polígono tem tantos vértices como lados, porque dois lados determinam um vértice e dois vértices, um lado.

Um lado é menor que a soma de todos os outros, em virtude do postulado do segmento.

Diagonal de um polígono é o segmento determinado por dois vértices não consecutivos, como AC na figura 26.

Ângulo dum polígono ou *ângulo* interno é o *ângulo* formado por dois lados consecutivos, tendo por vértice um vértice do polígono e a abertura voltada para o interior do mesmo polígono. Exemplo:

$\hat{D}$ na figura 26.

Ângulo externo dum polígono é o formado por um lado qualquer e o prolongamento do lado contíguo (*e*, fig. 26).

Perímetro é a soma das medidas dos lados de um polígono. Representa-se por $2p$; p é o semiperímetro.

Fig. 27

O polígono diz-se *convexo*, quando não é atravessado pelo prolongamento de qualquer dos seus lados, como o da figura 26. É côncavo, em caso contrário (fig. 27).

Polígono regular é o que tem os lados iguais e os ângulos também iguais.

O polígono regular côncavo é chamado *polígono regular estrelado*.

Um polígono diz-se ***inscrito*** em um outro quando seus vértices ficam no contôrno dêsse outro.

21. Nomenclatura. As denominações dos polígonos são derivadas do número de lados ou de ângulos. Usualmente, as denominações empregadas são:

o polígono de
- 3 lados chama-se *triângulo;*
- 4 lados chama-se *quadrilátero;*
- 5 lados chama-se *pentágono;*
- 6 lados chama-se *hexágono;*
- 7 lados chama-se *heptágono;*
- 8 lados chama-se *octógono;*
- 9 lados chama-se *eneágono;*
- 10 lados chama-se *decágono;*
- 11 lados chama-se *undecágono;*
- 12 lados chama-se *dodecágono;*
- 15 lados chama-se *pentadecágono;*
- 20 lados chama-se *icoságono.*

Para os demais, dá-se o número de lados; assim, diz-se: *polígono de treze lados*, por exemplo, em lugar de *tridecágono*.

22. Número de diagonais de um polígono. O número de diagonais é obtido pela fórmula:

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

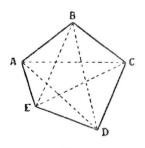



FIG. 28

onde d é o número de diagonais e n, o de lados.

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos os segmentos do vértice A, por exemplo, a cada um dos outros (fig. 28). Todos os vértices dão origem a uma diagonal, exceto o próprio vértice A e os dois que lhes são contíguos, B e E. Logo, o número de diagonais traçadas de A será

$$n - 3.$$

Se cada vértice dá origem a $n - 3$ diagonais, os n vértices darão a $n(n - 3)$. As diagonais assim consideradas se confundem, no entanto, duas a duas; a diagonal AC, por exemplo, traçada do vértice A, se confunde com CA, traçada de C. Logo, das $n(n-3)$ diagonais traçadas, apenas metade são distintas, concluindo-se:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Esta fórmula resolve dois problemas.

1.º) *Problema direto.* Dado o número de lados, achar o de diagonais. Exemplo:

Calcular o número de diagonais do hexágono.

Temos: $n = 6$. Aplicando a fórmula, resulta:

$$d = \frac{6\,(6-3)}{2} = 9.$$

2.º) *Problema inverso.* Dado o número de diagonais, achar o polígono.

Primeiro exemplo. *Qual o polígono que tem 20 diagonais?*

Temos: $d = 20$. Substituindo na fórmula:

$$\frac{n\,(n-3)}{2} = 20$$

donde: $$n^2 - 3n = 40$$

e $$n^2 - 3n - 40 = 0$$

Decompondo em fatôres:

$$(n-8)\,(n+5) = 0.$$

Se o produto é nulo, um dos fatôres é igual a zero. Assim temos:

$$n - 8 = 0 \;\therefore\; n = 8$$

ou $$n + 5 = 0 \;\therefore\; n = -5,$$ o que é impossível.

Conclui-se: *o polígono é o **octógono**.*

Segundo exemplo. *Qual o polígono, cujo número de diagonais é o triplo do número de lados?*

Temos: $d = 3n$. Substituindo na fórmula, vem:

$$3n = \frac{n\,(n-3)}{2}.$$

Simplificando o fator n e eliminando o denominador, conclui-se a equação do 1.º grau:

$$6 = n - 3 \;\therefore\; n = 9.$$

*O polígono é o **eneágono**.*

EXERCÍCIOS

1. Achar, em hm, o perímetro de um dodecágono regular em que um lado mede 15m. *Resp.:* 1,8hm.
2. Achar, em metros, a medida de um dos lados do undecágono regular cujo perímetro tem 253dm. *Resp.:* 2,3m.
3. Qual o polígono no qual se podem traçar 12 diagonais do mesmo vértice? *Resp.:* pentadecágono.
4. Quantas diagonais podemos traçar do mesmo vértice de um decágono? *Resp.:* 7.
5. Pode existir um quadrilátero, cujos lados meçam respectivamente 3m, 5m, 8m e 20m? Justificar a resposta. *Resp.:* não.

6. Do mesmo vértice *A* de um polígono foram traçadas 8 diagonais. Qual o polígono? *Resp.:* undecágono.
7. Calcular o número de diagonais de um octógono. *Resp.:* 20.
8. Calcular o número de diagonais de um decágono. *Resp.:* 35.
9. Achar o polígono que tem 27 diagonais distintas. *Resp.:* eneágono.
10. A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos é 26 e o primeiro tem 4 lados mais que o segundo. Achar os polígonos. *Resp.:* hexágono e decágono.
11. Achar o polígono, cujo número de lados é igual ao de diagonais. *Resp.:* pentágono.
12. Qual o polígono, cujo número de lados é 2/3 do de diagonais? *Resp.:* hexágono.
13. Qual o polígono, cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados? *Resp.:* undecágono.
14. A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos é de 4 unidades e a diferença entre o número de lados, de uma unidade. Achar os polígonos. *Resp.:* pentágono e hexágono.
15. Qual o polígono que tem 14 diagonais? *Resp.:* heptágono.

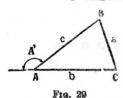
IV — TRIÂNGULOS

23. Definições. ***Triângulo*** é o polígono de três lados.

Um triângulo tem seis elementos principais: três lados e três ângulos. Os ângulos são representados por letras maiúsculas e os lados, pelas letras minúsculas correspondentes às dos ângulos opostos, como indica a figura 29.

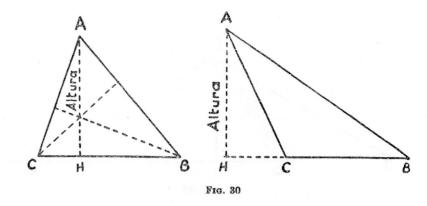
Além dos lados e ângulos consideram-se no triângulo os elementos secundários:

ângulos externos, como *A'* na figura 29, formados por um lado qualquer e o prolongamento do lado contíguo;

FIG. 29

alturas, segmentos das perpendiculares traçadas de cada vértice ao suporte do lado oposto (fig. 30);

medianas, segmentos que unem os vértices aos pontos médios dos lados opostos (fig. 31);

bissetrizes internas, segmentos das bissetrizes dos ângulos internos compreendidos entre cada vértice e o lado oposto (*AD*, fig. 32).

FIG. 30

bissetrizes externas, segmentos das bissetrizes dos ângulos externos, compreendidos entre cada vértice e o prolongamento do lado oposto (*AE*, fig. 32);

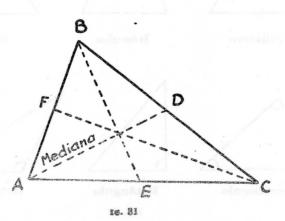
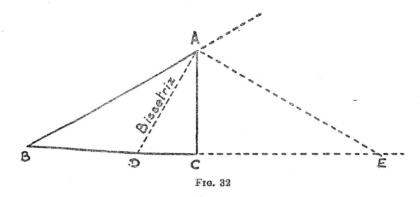
perímetro, soma dos lados.

De um modo geral, o segmento qualquer, compreendido entre um vértice e a intersecção com o lado oposto ou seu prolongamento denomina-se *ceviana*.

24. Classificação dos triângulos.

a) Quanto aos lados os triângulos classificam-se em (fig. 33):

FIG. 31

Fig. 32

eqüiláteros, quando têm os três lados iguais;

isósceles, quando têm dois lados iguais; o lado desigual é geralmente tomado como *base*;

escaleno, quando tem os três lados desiguais.

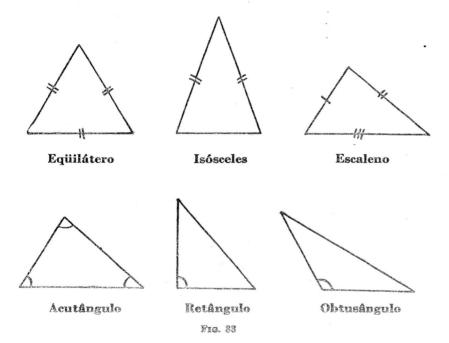



Fig. 33

b) Quanto aos ângulos os triângulos classificam-se em (fig. 33):

retângulos, quando têm um ângulo reto;

acutângulos, quando têm os três ângulos agudos;

obtusângulos, quando têm um ângulo obtuso.

Aos dois últimos, dá-se, também, a denominação geral de *obliquângulos*.

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto tem o nome de *hipotenusa;* os lados do ângulo reto chamam-se *catetos*.

25. Relações entre os lados de um triângulo.

Cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

Seja o triângulo *ABC* (fig. 29). Em virtude do postulado do segmento, concluiremos imediatamente:

$$a < b + c$$

Conseqüências.

Primeira. ***Cada lado de um triângulo é maior que a diferença dos dois outros.***

Em virtude da relação anterior, resulta:

$$b + c > a,$$

e portanto, $c > a - b$ e $b > a - c$.

Anàlogamente, de: $a + c > b$

resulta $a > b - c$.

Segunda conseqüência. Com três segmentos quaisquer nem sempre poderemos formar um triângulo. Para que isto seja

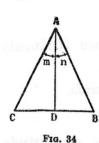
possível, ***é condição indispensável que o maior dos três segmentos seja menor que a soma dos dois outros.*** Assim, com segmentos de 7m, 4m e 2m, não se poderá formar um triângulo.

26. Propriedades do triângulo isósceles.

Primeira propriedade.

A bissetriz do ângulo do vértice é, também, mediana e altura.

Seja o triângulo isósceles ABC e AD a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ (fig. 34).

Fig. 34

Hip.: $\begin{cases} AB = AC \\ \hat{m} = \hat{n} \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} AD \perp BC \\ DB = DC \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO. Se fizermos a rotação de ADB em tôrno de AD, o ângulo n coincidirá com seu igual m; logo, o lado AB tomará a direção de AC e, como são iguais, o ponto B coincidirá com C. Assim, o segmento DB coincidirá com DC e podemos concluir:

1.º) $DB = DC \rightarrow AD$ é mediana

2.º) $\angle ADB = \angle ADC \rightarrow AD$ é altura.

OBSERVAÇÃO. Observemos que a mediana, a altura e a bissetriz interna traçadas sôbre a base do triângulo isósceles se confundem e, conseqüentemente, o teorema pode ser também enunciado:

a altura é ao mesmo tempo mediana e bissetriz; ou

a mediana é ao mesmo tempo bissetriz e altura.

COROLÁRIO. No triângulo eqüilátero, as três alturas se confundem com as três medianas e com as três bissetrizes internas.

Segunda propriedade.

Os ângulos opostos aos lados iguais são iguais.

Seja o triângulo isósceles ABC (fig. 34).
Hipótese: $AB = AC$; Tese: $\hat{B} = \hat{C}$.

Tracemos a mediana AD que será, ao mesmo tempo, altura e bissetriz, em virtude da propriedade anterior. Assim, se fizermos rotação de ADB em tôrno de AD, o segmento DB coincidirá com DC e BA com CA; logo, os ângulos B e C coincidem e são iguais.

CONSEQÜÊNCIA. ***O triângulo eqüilátero é também eqüiângulo.***

Recíproca.

Se dois ângulos de um triângulo forem iguais o triângulo será isósceles.

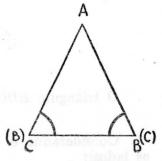
Seja o triângulo ABC (fig. 35).
Hipótese: $\hat{B} = \hat{C}$; Tese: $AB = AC$.

DEMONSTRAÇÃO. Desloquemos o triângulo de modo que o ponto B ocupe o lugar de C e C o de B como indicam as letras entre parênteses na figura 35.

Como os ângulos B e C são iguais por hipótese, o lado CA seguirá a direção de BA e BA a de CA. O ponto A, devendo ficar simultâneamente sôbre BA e CA, manterá sua posição primitiva e o lado AB coincidirá com AC, concluindo-se:

$$AB = AC$$

Fig. 35

CONSEQÜÊNCIA. ***O triângulo eqüiângulo é também eqüilátero.***

Observação. Da segunda propriedade e sua recíproca, resulta que o triângulo isósceles pode ser definido, indiferentemente, por uma das equações

$$\hat{B} = \hat{C} \quad \text{ou} \quad AB = AC,$$

pois qualquer delas acarreta a outra.

A primeira será utilizada nas questões angulares e a segunda, nas lineares.

27. Relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Primeira relação:

Se um triângulo tiver dois ângulos desiguais, ao maior ângulo opor-se-á maior lado.

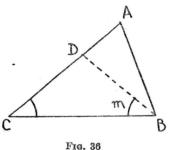
Seja o triângulo ABC (fig. 30). Teremos:

Hipótese: $\hat{B} > \hat{C}$ Tese: $AC > AB$.

Demonstração. No interior do ângulo B tracemos BD, de modo que se tenha:

$$\hat{m} = \hat{C},$$

o que é possível, em virtude da hipótese.

Fig. 36

O triângulo BDC, será, isósceles, isto é:

$$BD = DC \qquad (1)$$

Considerando o triângulo ABD teremos (relações entre os lados):

$$AD + BD > AB,$$

ou, substituindo BD por ser igual a DC (1):

$$AD + DC > AB,$$

donde, finalmente:

$$\boxed{AC > AB}$$

Recíproca.

Em todo triângulo, ao maior lado opõe-se maior ângulo.

Hip.: $AC > AB$. Tese: $\hat{B} > \hat{C}$ (fig. 36).

Demonstração. Entre os ângulos B e C existirá, ***necessàriamente***, uma das três relações:

$$\hat{B} = \hat{C}; \quad \hat{B} < \hat{C} \quad \text{ou} \quad \hat{B} > \hat{C}.$$

Se ocorresse a primeira ($\hat{B} = \hat{C}$), teríamos (triângulo isósceles):

$$AC = AB$$

o que contrariaria a hipótese, constituindo *absurdo*.

Assim, ***$\hat{B}$ não pode ser igual a $\hat{C}$.***

Se ocorresse a segunda ($\hat{B} < \hat{C}$), teríamos, em virtude do teorema direto:

$$AC < AB$$

o que também contrariaria a hipótese.

Logo, ***$\hat{B}$ não pode ser menor que $\hat{C}$.***

Somos, então, forçados a concluir:

$$\hat{B} > \hat{C},$$

pois uma das três relações existe necessàriamente.

Consequência. No triângulo retângulo, a hipotenusa é maior que qualquer cateto, por estar oposta ao maior ângulo.

Observação. O método utilizado na demonstração dessa recíproca é um exemplo do método geral denominado *método de exclusão*, utilizado comumente na *demonstração das recíprocas*.

O método se aplica quando tôdas as conclusões possíveis sôbre o objeto da tese se excluem mùtuamente e uma delas tem, necessàriamente, de existir.

Excluímos, em seguida, as conclusões que contrariarem a hipótese ou uma propriedade anteriormente estabelecida. A conclusão que não fôr excluída será a verdadeira.

Segunda relação:

Quando dois triângulos têm dois lados respectivamente iguais e o ângulo formado pelos dois lados do primeiro é maior que o ângulo formado pelos dois lados do segundo, o terceiro lado do primeiro é maior que o terceiro lado do segundo.

Sejam os triângulos ABC e DEF (fig. 37).
Teremos:

$$\text{Hip.:} \begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ \hat{A} > \hat{D} \end{cases} \qquad \text{Tese: } BC > EF.$$

Demonstração. Transportemos o triângulo DEF sôbre o triângulo ABC, de modo que DF coincida com seu igual AC

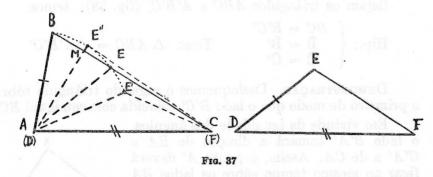



Fig. 37

(2.ª hipótese). Como o ângulo D é menor que A por hipótese, o lado DE ficará no interior do ângulo A (3.ª hipótese). Três casos podem, então, ocorrer, como mostra o arco BE' na fig. 37.

Primeiro caso. *O vértice E cai sôbre o lado BC. (ponto E do arco BE').*

Neste caso, teremos imediatamente:

$$EC < BC$$

ou

$$\boxed{BC > EF}$$

Segundo caso. *O vértice E fica no interior do triângulo ABC, em E'.*

Neste caso, teremos:

$$AB + BC > AE' + E'C \text{ (teorema da envolvente).}$$

Como $AB = AE' = DE$, por hipótese, vem, simplificando:

$$\boxed{BC > E'C}$$

Terceiro caso. *O vértice E fica no exterior do triângulo ABC, em E''.*

Se considerarmos os triângulos AMB e $ME''C$, poderemos concluir:

$$AM + MB > AB$$
$$ME'' + MC > E''C$$

donde, adicionando:

$$AE'' + BC > AB + E''C$$

e, como AE'' e AB são iguais por hipótese:

$$\boxed{BC > E''C}$$

Recíproca.

Quando dois triângulos têm dois lados respectivamente iguais e os terceiros lados desiguais, os ângulos opostos a êstes últimos são desiguais, e ao menor lado opõe-se menor ângulo.

Consideremos os dois triângulos ABC e DEF da mesma figura 37. Teremos:

$$\text{Hip.:} \begin{cases} DE = AB \\ DF = AC \\ EF < BC \end{cases} \qquad \text{Tese: } \hat{D} < \hat{A}$$

DEMONSTRAÇÃO. Sôbre a grandeza relativa dos ângulos A e D (objeto da tese) podemos formular tôdas as conclusões possíveis, as quais se excluem mùtuamente, pois, um ângulo não pode ser, ao mesmo tempo, maior e menor que outro. Assim, a recíproca demonstra-se pelo *método de exclusão.*

1.º) Suponhamos $\hat{D} = \hat{A}$.

Neste caso, se deslocássemos o $\triangle DEF$ sôbre o $\triangle ABC$ de modo que o ângulo D coincidisse com seu igual A os lados DE e DF coincidiriam respectivamente, com seus iguais AB e AC (hipótese). Assim, o ponto E coincidiria com B e o ponto F com C. Teríamos, então:

$$EF = BC,$$

o que contrariaria a terceira hipótese.

Logo, $\hat{D}$ ***não é igual a*** $\hat{A}$.

2.º) Se tivéssemos $\hat{D} > \hat{A}$, concluiríamos, em virtude do teorema direto:

$$EF > BC,$$

o que também contraria a terceira hipótese. Logo, $\hat{D}$ ***não é maior que*** $\hat{A}$. Se $\hat{D}$ não pode ser maior nem igual a $\hat{A}$, somos forçados a concluir:

$$\hat{D} < \hat{A}.$$

OBSERVAÇÃO. Os teoremas recíprocos, cuja demonstração se fizer pelo método geral de exclusão terão, nos capítulos seguintes, apenas a indicação do método de demonstração.

28. Congruência de triângulos. Dois triângulos são congruentes quando podem coincidir por superposição.

Dois triângulos *congruentes* têm os três lados e os três ângulos respectivamente *iguais*, em virtude da definição anterior.

Os elementos que coincidem na superposição de duas figuras congruentes, isto é, que se correspondem, denominam-se ***homólogos.***

Para indicar a congruência emprega-se o símbolo $\cong$, que se lê: *congruente com.* Assim, $A \cong B$, lê-se: *A é congruente com B.* É também, comum indicar a congruência com o símbolo da igualdade ($=$).

OBSERVAÇÃO. Emprega-se em particular a denominação *congruência* para indicar uma relação de *igualdade entre figuras*, isto é, a congruência é uma relação que envolve conceitos geométricos, enquanto que a denominação de *igualdade* é mais pròpriamente utilizada para indicar uma relação métrica entre figuras, isto é, envolve o conceito de *medida.*

A rigor, os dois conceitos são distintos.

29. Casos ou critérios de congruência de triângulos.

A verificação da *congruência* pela definição é sempre trabalhosa; os teoremas de congruência têm por fim estabelecer os casos em que se pode afirmar a congruência de dois triângulos, com o número mínimo de condições. São três, de um modo geral, as condições, sendo uma delas, necessàriamente, a igualdade entre um elemento linear do primeiro e o homólogo do segundo. São três os casos importantes de congruência.

Primeiro caso.

Dois triângulos que têm um lado igual, adjacente a dois ângulos respectivamente iguais, são congruentes. (*AlA*)

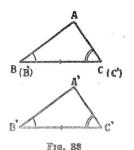
Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 38); temos:

Hip.: $\begin{cases} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$ Tese: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

DEMONSTRAÇÃO. Desloquemos o segundo triângulo sôbre o primeiro de modo que o lado $B'C'$ coincida com seu igual BC.

Em virtude da igualdade dos ângulos, o lado $B'A'$ tomará a direção de BA e $C'A'$ a de CA. Assim, o ponto A' deverá ficar ao mesmo tempo sôbre os lados BA e CA e, portanto, coincidirá com a interseção dessas duas retas que é A. Os triângulos são, pois, congruentes.

FIG. 38

OBSERVAÇÃO. Adiante, será levantada a restrição de serem iguais, obrigatòriamente, os ângulos adjacentes ao lado igual (pág. 121).

CONSEQÜÊNCIA. ***Dois triângulos retângulos que têm um cateto e o ângulo agudo adjacente iguais, são congruentes.*** Realmente, como os ângulos retos são iguais, ficam iguais dois ângulos e um lado.

Segundo caso.

Dois triângulos que têm um ângulo igual, compreendido entre lados respectivamente iguais, são congruentes (*IAI*).

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 39).

$$\text{Hip.:} \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \qquad \text{Tese: } \Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

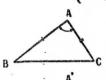



FIG. 39

DEMONSTRAÇÃO. Desloquemos o ângulo A' sôbre seu igual A. O lado $A'B'$ tomará a direção de AB e o lado $A'C'$ a de AC.

Como êsses lados são respectivamente iguais por hipótese, o ponto B' coincidirá com B e C' com C, coincidindo conseqüentemente os dois triângulos.

CONSEQÜÊNCIA. ***Dois triângulos retângulos que têm os catetos respectivamente iguais, são congruentes.*** Os ângulos retos são iguais, logo, temos dois lados e um ângulo.

Terceiro caso.

Dois triângulos que têm os três lados respectivamente iguais, são congruentes (*lll*).

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 38).

$$\text{Hip.:} \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \qquad \text{Tese: } \Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

DEMONSTRAÇÃO. Se o ângulo A' fôsse menor que o ângulo A, teríamos, de acôrdo com a relação entre lados e ângulos:

$$B'C' < BC,$$

o que é contra a terceira hipótese.

Se o ângulo A' fôsse maior que A, teríamos pela mesma relação:

$$B'C' > BC,$$

o que também contraria a terceira hipótese.

Logo, será forçosamente

$$\hat{A}' = \hat{A}$$

e os dois triângulos têm pois um ângulo igual formado por lados respectivamente iguais e, conseqüentemente, serão congruentes, em virtude do segundo caso.

CONSEQÜÊNCIA. ***Dois triângulos eqüiláteros que têm o lado igual, são congruentes.***

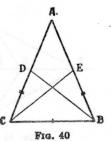
30. Aplicação dos casos de congruência. Os casos de congruência constituem um recurso de demonstração aplicável quando a tese consiste em provar a igualdade de dois segmentos ou de dois ângulos.

Realmente, considerando que, por definição, em triângulos congruentes os elementos homólogos são iguais, e que, em cada caso, a congruência decorre da hipótese de serem iguais três elementos (um pelo menos linear), poderemos, então, concluir a igualdade dos outros três, o que abrangerá a tese a demonstrar. Exemplo:

Provar que as medianas, traçadas dos vértices da base de um triângulo isósceles, são iguais.

Seja o triângulo isósceles ABC (fig. 40); BD e CE as medianas.

FIG. 40

DEMONSTRAÇÃO. Os triângulos BDC e BCE são congruentes em virtude do segundo caso, porque:

BC é comum;
$BE = CD$ (metades de lados iguais);
$\hat{B} = \hat{C}$ (triângulo isósceles).

Da congruência dos triângulos resulta:

$$BD = CE.$$

V — PERPENDICULARES E OBLÍQUAS

31. Propriedades. Se de um ponto exterior a uma reta se traçam a perpendicular e várias oblíquas, concluem-se as propriedades:

> **I. Duas oblíquas, cujos pés se afastam igualmente do da perpendicular, são iguais.**

DEMONSTRAÇÃO. Se tivermos $BC = BD$ (fig. 41), os dois triângulos retângulos ABC e ABD serão congruentes (2.º caso) e, portanto, concluiremos:

$$AC = AD.$$

> **II. A perpendicular é menor que qualquer oblíqua.**

DEMONSTRAÇÃO. Seja AB a perpendicular e AD, uma oblíqua (fig. 41).

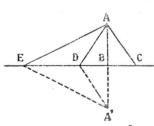
Prolonguemos AB de um comprimento BA' que lhe seja igual e concluiremos, em virtude da primeira parte:

$$AD = A'D.$$

FIG 41

Isto pôsto, temos:

$$AA' < AD + DA',$$

ou,

$$2AB < 2AD$$

donde, tomando as metades dos dois membros, resulta:

$$AB < AD.$$

DEFINIÇÃO. Distância de um ponto a uma reta é o segmento da perpendicular à reta, traçada dêsse ponto.

Na figura 41 a distância de A a CE é AB.

> **III. A oblíqua, cujo pé mais se afasta do da perpendicular, é a maior.**

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos as oblíquas AD e AE e tracemos DA' e EA' (fig. 41).

Em virtude da propriedade das envolventes, podemos concluir:

$$AE + EA' > AD + DA'.$$

Como, em virtude da primeira parte, as parcelas do mesmo membro são iguais, concluiremos:

$$2AE > 2AD,$$

ou,

$$AE > AD.$$

32. Recíprocas.

> **I. Se duas oblíquas, traçadas do mesmo ponto, são iguais, seus pés se afastam igualmente do da perpendicular.**
>
> **II. A menor linha que se pode traçar de um ponto a uma reta é o segmento perpendicular a essa reta.**
>
> **III. Se duas oblíquas, traçadas do mesmo ponto são desiguais, a maior tem o pé mais afastado do da perpendicular.**

A demonstração de qualquer parte da recíproca segue o método geral de exclusão.

CONSEQÜÊNCIA. ***De um ponto exterior a uma reta, podem ser traçadas apenas duas oblíquas com um comprimento dado, e essas oblíquas ficam situadas de lados opostos em relação à perpendicular.***

33. Casos particulares de congruência de triângulos retângulos.

> **3.º caso. Dois triângulos retângulos que têm a hipotenusa e um ângulo agudo respectivamente iguais, são congruentes.**

Sejam os triângulos retângulos BAC e $B'A'C'$ (fig. 43).

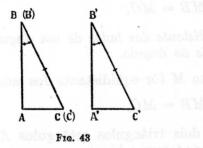
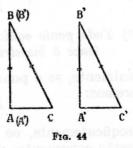
Hip.: $\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \end{cases}$ Tese: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Demonstração. Desloquemos o segundo triângulo sôbre o primeiro de modo que as hipotenusas iguais coincidam, como indicam os pontos B' e C' entre parênteses na fig. 43.

De acôrdo com a hipótese ($\hat{B} = \hat{B}'$), o cateto $B'A'$ seguirá a direção de BA e o ponto A' coincidirá com um dos pontos de CA.

Como de um ponto exterior (C' em coincidência com C) só se pode traçar uma perpendicular a uma reta, $C'A'$ seguirá a direção de CA, e o ponto A' coincidirá com um dos pontos de CA.

Fig. 43

Fig. 44

Assim, o ponto A' deve pertencer, ao mesmo tempo, às retas BA e CA, e coincidirá com a intersecção das mesmas, isto é, com o ponto A. Os dois triângulos são, pois, congruentes.

> **4.º caso. Dois triângulos retângulos que têm a hipotenusa e um cateto respectivamente iguais, são congruentes.**

Sejam os triângulos retângulos BAC e $B'A'C'$ (fig. 44).

Hip.: $\begin{cases} BC = B'C' \\ BA = B'A' \end{cases}$ Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$.

Demonstração. Desloquemos o segundo triângulo de modo que o cateto $B'A'$ coincida com seu igual BA. O segundo cateto $A'C'$ seguirá a direção AC. Como as oblíquas $B'C'$ e BC são iguais por hipótese, seus pés afastar-se-ão igualmente do da perpendicular e, portanto, o ponto C' coincidirá com C. Assim, os dois triângulos terão os três vértices em coincidência e serão congruentes.

Resumo dos casos de congruência de triângulos retângulos:

> **1.º) Um cateto e o ângulo agudo adjacente iguais.**
> **2.º) Dois catetos respectivamente iguais.**
> **3.º) Hipotenusa e um ângulo agudo iguais.**
> **4.º) Hipotenusa e um cateto respectivamente iguais.**

34. Lugares geométricos.

a) ***Noção de lugar geométrico.*** Chama-se ***lugar geométrico*** *ao conjunto dos pontos que gozam de uma mesma propriedade que lhes é exclusiva.*

Em virtude dessa definição, podemos provar que um conjunto de pontos constitui um lugar geométrico de duas maneiras:

1.ª) Demonstrando que todo ponto do conjunto goza da propriedade, e que todo ponto que goza da propriedade pertence ao conjunto (*teoremas direto e recíproco*).

2.ª) Demonstrando que todo ponto do conjunto goza da propriedade, e que todo ponto que não faz parte do conjunto não possui a propriedade (*teoremas direto e contrário*).

Isto porque, se a proposição *direta* e a *recíproca* forem verdadeiras, a *contrária* também será; e, se a *direta* e *contrária* forem verdadeiras, a *recíproca* também será.

b) Exemplos de lugar geométrico.

Primeiro exemplo. ***A mediatriz de um segmento, isto é, a perpendicular traçada por seu ponto médio, é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos extremos.***

Seja a reta S, mediatriz do segmento AB (fig. 45), isto é,

$$AC = BC \quad \text{e} \quad S \perp AB.$$

1.º) *Todo ponto da reta S é eqüidistante de A e B.*

Realmente, considerando um ponto qualquer P da reta S (fig. 45), teremos:

$$PA = PB,$$

como oblíquas, cujos pés se afastam igualmente do da perpendicular.

2.º) *Todo ponto exterior à reta S não possui a propriedade.*

Seja o ponto M, exterior à reta S (fig. 46). Traçando MB e MA, temos, em virtude da primeira parte:

$$IA = IB.$$

Por outro lado, o triângulo MIB permite concluir:

$$MB < MI + IB.$$

Substituindo IB por seu igual IA, temos:

$$MB < MI + IA \quad \text{ou} \quad MB < MA.$$

Fig. 45

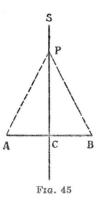
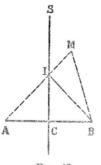



Fig. 46

Assim, o ponto exterior, M, é desigualmente afastado dos pontos A e B.

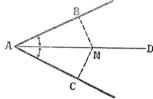
Observação. Os pontos A e B dizem-se ***simétricos*** em relação à reta S, isto é, em relação à mediatriz do segmento AB.

Segundo exemplo. - ***A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos lados***

Seja o ângulo BAC e AD a bissetriz (fig. 47), isto é:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD}.$$

Fig. 47

1.º) *Todo ponto da bissetriz é eqüidistante dos lados.*

Realmente, considerando um ponto qualquer, M, da bissetriz, tracemos as perpendiculares MB e MC.

Os dois triângulos MAB e MAC são congruentes por terem a hipotenusa AM comum, e os ângulos agudos MAB e MAC iguais por hipótese. Da congruência dos triângulos resulta:

$$MB = MC.$$

2.º) *Todo ponto eqüidistante dos lados de um ângulo pertence à bissetriz do ângulo.*

Realmente, se o ponto M fôr eqüidistante dos lados (fig. 47), teremos:

$$MB = MC,$$

e, conseqüentemente, os dois triângulos retângulos ABM e ACM serão congruentes por terem a hipotenusa comum e um cateto igual por hipótese. Da igualdade dos triângulos, resultará:

$$\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$$

e, portanto, AM é bissetriz do ângulo A.

Observemos que, no primeiro exemplo, utilizámos o segundo raciocínio e, no segundo exemplo, o primeiro.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de duas retas concorrentes.
2. Dada uma reta e dois pontos exteriores A e B, determinar um ponto da reta eqüidistante de A e B.
   Resp.: Ponto de intersecção da reta com a mediatriz de AB.
3. Dados dois pontos A e B e duas retas S e S', todos do mesmo plano, determinar um ponto dêsse plano eqüidistante de A e B e cujas distâncias a S e S' sejam também iguais.
   Resp.: Intersecção da mediatriz de AB com a bissetriz do ângulo das retas S e S'.
4. Determinar o lugar dos pontos do plano, situados a 8cm de um ponto C, do mesmo plano.
5. O segmento AB tem 10cm. Um ponto C está situado a 9cm de A e a 12cm de B. Determinar um ponto distante 8cm de C e que seja eqüidistante de A e B.
6. A mediana traçada de um dos vértices dum triângulo é eqüidistante dos outros dois vértices. Provar.
7. As alturas traçadas sôbre os lados iguais de um triângulo isósceles são iguais. Provar.
8. Se as perpendiculares traçadas do ponto médio de um dos lados dum triângulo aos outros dois lados forem iguais, o triângulo é isósceles.
9. Se as perpendiculares traçadas dum ponto interior dum ângulo aos dois lados forem iguais, a reta que une êste ponto ao vértice, é bissetriz do ângulo. Provar.
10. Se duas alturas de um triângulo forem iguais o triângulo é isósceles. Provar.

VI — PARALELAS

35. Definições. Duas *retas* são *paralelas* quando, situadas no mesmo plano, não têm ponto comum.

Duas *semi-retas* ou dois *segmentos* são *paralelos* quando seus suportes são retas paralelas.

Duas *semi-retas paralelas* dizem-se do ***mesmo sentido*** quando ficam situadas do mesmo lado da reta que passa por suas origens.

36. Primeiro teorema.

> **Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.**

Hipótese: *As retas* AB *e* CD *são perpendiculares a* AC (fig. 48).

Tese: $AB \parallel CD$.

DEMONSTRAÇÃO. Se as retas AB e CD tivessem um ponto comum, haveria dêsse ponto duas perpendiculares a AC, o que é impossível.

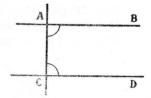



FIG. 48

CONSEQÜÊNCIA. ***Existe a reta paralela a uma reta traçada por um ponto exterior.***

37. Postulado das paralelas ou de Euclides. ***De um ponto exterior a uma reta, a paralela que se pode traçar é única.***

CONSEQÜÊNCIAS:

Primeira. ***Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.*** Realmente, se as retas S_1 e S_2 são paralelas à reta S (fig. 49) não se podem cortar, pois, em caso contrário, do ponto comum ficariam traçadas duas paralelas à reta S, o que contrariaria o postulado de Euclides.

S_1

S_2

S

FIG. 49

Observemos que, em virtude dessa primeira conseqüência, desde que várias retas sejam paralelas a uma reta dada, serão paralelas entre si, o que assegura a existência de um conjunto de retas paralelas, denominado *feixe de paralelas*.

Segunda. ***Qualquer reta que interceptar uma das retas de um feixe de paralelas, interceptará tôdas as outras.*** Realmente, se não interceptasse as demais, lhes seria paralela, e do ponto de intersecção ficariam traçadas duas paralelas às demais, o que contrariaria o postulado de Euclides

A reta que intercepta as paralelas de um feixe denomina-se *transversal* ou *secante*.

Terceira. ***Se duas retas são paralelas, tôda reta que seja perpendicular a uma, também o será à outra.*** Sejam as retas paralelas AB e CD (fig. 48) e AC perpendicular a AB. Se AC e CD não fôssem perpendiculares, do ponto C podería mos traçar uma perpendicular a AC, que seria paralela a AB (1.º teorema); assim, do ponto C ficariam traçadas duas paralelas a AB, o que contrariaria o postulado de Euclides.

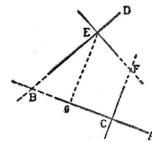



Fig. 50

Quarta. ***Se duas retas forem concorrentes, suas perpendiculares respectivas também o serão.*** Sejam AB e BD as concorrentes, CF e EF suas perpendiculares.

Tracemos GE perpendicular a AB (fig. 50).

Será GE paralela a CF (1.º teorema); logo, se FE fôsse paralela a CF ficariam traçadas pelo ponto E duas paralelas a CF, o que contrariaria o postulado de Euclides.

38. Sistema de três retas. Dadas três retas complanares que não concorram no mesmo ponto, ou são tôdas paralelas (feixe de paralelas), ou são paralelas apenas duas, ou tôdas são concorrentes, duas a duas.

Nos dois últimos casos, haverá sempre uma reta que corta as duas outras e que recebe o nome particular *secante* ou *transversal* (fig. 51).

A transversal forma com as duas outras retas oito ângulos, como a, b, c, d, m, n, p, q, na figura 51.

Consideremos um par dêsses ângulos, tendo um dêles o vértice em A e o outro tendo-o em B.

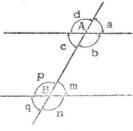



Fig. 51

Conforme suas posições êsses ângulos recebem as seguintes denominações:

alternos internos:	(b e p) ou (c e m)
alternos externos:	(a e q) ou (d e n)
colaterais internos:	(c e p) ou (b e m)
colaterais externos:	(a e n) ou (d e q)
correspondentes	(a e m) ou (b e n) (c e q) ou (d e p)

39. Segundo teorema.

> **Quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal qualquer, os quatro ângulos agudos são iguais entre si, bem como os quatro obtusos.**

Sejam S_1 e S_2 as duas paralelas e S a secante (fig. 52).

Hipótese: $S_1 \parallel S_2$ Tese: $\begin{cases} a = c = m = p \\ b = d = n = q \end{cases}$

Demonstração. Tracemos, pelo ponto médio M do segmento AB, a perpendicular CD às duas paralelas. Ficam formados os dois triângulos retângulos MAC e MDB, que são congruentes por terem as hipotenusas MA e MB iguais por construção e os ângulos agudos em M iguais como opostos pelo vértice.

Fig. 52

Da igualdade dêsses triângulos, resulta:

$$c = m$$

Como a e p são, respectivamente, opostos pelo vértice a c e m, temos:

$$a = c = m = p \qquad (1)$$

Os ângulos obtusos b, d, n, q, são suplementos dos agudos; logo, conclui-se:

$$b = d = n = q \qquad (2)$$

CONSEQÜÊNCIAS. ***Dois ângulos alternos internos, ou alternos externos, ou correspondentes são sempre ambos agudos ou ambos obtusos, enquanto que dois colaterais internos ou colaterais externos são um agudo e um obtuso.*** Daí as conseqüências:

Quando duas paralelas são cortadas por uma transversal:

1) *dois ângulos alternos internos são iguais;*
2) *dois ângulos alternos externos são iguais;*
3) *dois ângulos correspondentes são iguais;*
4) *dois ângulos colaterais internos são suplementares;*
5) *dois ângulos colaterais externos são suplementares.*

Observemos que, verificando-se qualquer dessas cinco condições, as outras quatro serão necessàriamente verificadas.

Recíprocas. As recíprocas das cinco conseqüências são verdadeiras e demonstram-se pelo método geral de exclusão.

1) Se os ângulos alternos internos, formados por duas retas dadas com uma transversal, forem iguais, as retas dadas são paralelas.
2) Se os ângulos alternos externos forem iguais, as retas dadas são paralelas.
3) Se dois ângulos correspondentes, formados por duas retas com uma transversal, forem iguais, as retas são paralelas.
4) Se dois ângulos colaterais internos forem suplementares, as retas são paralelas.
5) Se dois ângulos colaterais externos forem suplementares, as retas são paralelas.

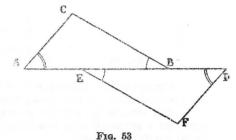
APLICAÇÃO. As cinco recíprocas aplicam-se à demonstração do paralelismo de duas retas. Assim, para demonstrar que duas retas dadas numa figura são paralelas, provaremos que satisfazem a uma das cinco recíprocas. Exemplo:

Na figura ao lado são dados:

1. $AC = DF$
2. $AE = BD$
3. $BC = EF$

Provar:

1. $BC \parallel EF$
2. $AC \parallel DF$.

FIG. 53

DEMONSTRAÇÃO. Em virtude da segunda hipótese, podemos concluir a igualdade dos segmentos AB e DE, pois resultam da adição dos segmentos iguais AE e BD com o mesmo segmento BE. Logo, o triângulo ABC é congruente com DEF em virtude do terceiro caso, porque os dois outros lados AC e BC são respectivamente iguais a DF e EF (hipóteses 1 e 3).

Da congruência dos triângulos resulta:

1) $\hat{B} = \hat{E}$ e, portanto, BC e EF formam com a transversal AD ângulos alternos internos iguais e são paralelas.

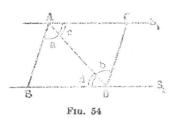
2) $\hat{A} = \hat{D}$, e, portanto, AC é paralela à DF, pela mesma razão.

40. Terceiro teorema.

Dois segmentos paralelos, compreendidos entre retas paralelas, são iguais.

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ S_1 \parallel S_2 \end{cases}$ Tese: $AB = CD$ (fig. 54).

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos o segmento AD. Os dois ângulos a e b são iguais como alternos internos, e da mesma forma

Fig. 54

os ângulos c e d. Logo, os dois triângulos ABD e ACD são congruentes por terem um lado comum adjacente a ângulos respectivamente iguais (1.º caso). Dessa congruência, resulta:

$$AB = CD$$

OBSERVAÇÃO. Chama-se *distância* de duas retas paralelas o segmento da perpendicular comum compreendido entre as mesmas paralelas.

Em virtude do terceiro teorema, essa distância é a mesma qualquer que seja a perpendicular considerada, pois as perpendiculares às paralelas serão também paralelas.

41. Aplicações da teoria das paralelas aos ângulos.

1.ª) *Ângulos de lados paralelos.*

Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são iguais ou suplementares

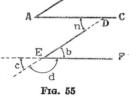
1.º) Sejam os ângulos A e E da figura 55, cujos lados são respectivamente paralelos e dirigidos no mesmo sentido.

Os ângulos A e n são iguais como alternos internos de paralelas, e da mesma forma são iguais b e n; logo, conclui-se:

$$\hat{A} = b.$$

Fig. 55

Como b é igual a c (opostos pelo vértice), resulta:

$$\hat{A} = c.$$

2.º) Se os lados do primeiro ângulo têm, um o mesmo sentido, e outro, sentido contrário aos lados do segundo os ângulos são suplementares.

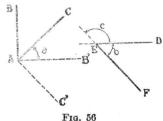
Os ângulos b e d são suplementares; logo, A e d são também suplementares, pois A é igual a b.

2.ª) *Ângulos de lados perpendiculares.*

Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são iguais ou suplementares.

Sejam A e E (fig. 56) dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares.

Do vértice A tracemos AB' perpendicular a AB e AC', perpendicular a AC. Os ângulos BAC e $B'AC'$ serão iguais por terem o mesmo complemento a. Por outro lado, o ângulo $B'AC'$ tem os lados respectivamente paralelos aos do ângulo E, pois duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas; logo, em virtude do teorema anterior, será igual a E e suplemento de c, isto é

Fig. 56

$$\widehat{B'AC'} = \hat{E}$$

$$\widehat{B'AC'} + c = 2r.$$

Substituindo, nas duas igualdades, $\widehat{B'AC'}$ por seu igual BAC, resulta, finalmente:

$$\widehat{BAC} = \hat{E}$$

$$\widehat{BAC} + c = 2r.$$

42. Aplicação da teoria das paralelas aos triângulos.

Se, do ponto médio do lado de um triângulo, traçarmos uma paralela a um segundo lado, esta paralela passará no ponto médio do terceiro.

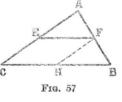



Fig. 57

DEMONSTRAÇÃO. Seja E o ponto médio de AC e EF paralela a BC (fig. 57).

Tracemos FH, paralela a AC.

Teremos:

1) $AE = EC$ (hipótese); $FH = CE$, como paralelas entre paralelas, e, portanto, $FH = AE$;
2) $\hat{A} = H\hat{F}B$, como correspondentes;
3) $\hat{E} = \hat{H}$, por terem lados paralelos.

Assim, os triângulos AEF e BFH são congruentes e concluiremos:

$$AF = BF.$$

Recíproca.

A reta que passa pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado.

Seja o triângulo ABC e EF o segmento que une os pontos médios dos lados AC e AB (fig. 57).

Hip.: $\begin{cases} AE = EC \\ AF = BF \end{cases}$ Tese: $EF \parallel BC$

Se do ponto E traçarmos uma paralela a BC, em virtude do teorema direto esta paralela passará no ponto médio de AB. Ora, o ponto médio de AB é o ponto F; logo, a paralela traçada passa em F e conclui-se:

$$EF \parallel BC$$

CONSEQÜÊNCIA.

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é igual à metade do terceiro lado.

Hip.: $\begin{cases} AE = EC \\ AF = BF \end{cases}$ Tese: $EF = \dfrac{BC}{2}.$

DEMONSTRAÇÃO.

De acôrdo com a recíproca anterior, temos:

$$EF \parallel BC \quad \text{(fig. 57).}$$

Tracemos, então, o segmento FH, paralelo a AC. Em virtude do teorema direto, teremos:

$$CH = BH = \frac{BC}{2} \qquad (1)$$

Por outro lado EF é igual a CH, como segmentos paralelos compreendidos entre paralelas, e podemos concluir (igualdade 1):

$$EF = \frac{BC}{2}.$$

EXERCÍCIOS

1. Um dos ângulos formados por uma transversal com duas paralelas mede 51°28′. Calcular todos os outros ângulos.
Resp.: 51°28′ e 128°32′.
2. A diferença entre dois ângulos colaterais internos formados por duas paralelas com uma transversal é de 53°29′20″. Calcular todos os ângulos da figura. *Resp.:* 116°44′40″ e 63°15′20″.
3. Um dos ângulos internos formados por duas paralelas com uma transversal mede 125°36′40″. Calcular os ângulos da figura.
Resp.: 125°36′40″ e 54°23′20″.
4. Duas paralelas são cortadas por uma transversal, formando dois ângulos colaterais internos, a e b. Sendo $a = 5x + 25°$ e $b = 2x - 20°$, calcular os ângulos da figura. *Resp.:* 150° e 30°.
5. Uma transversal corta duas paralelas. Calcular os ângulos formados pela transversal com as paralelas, sabendo que a soma dos ângulos agudos é de 204°. *Resp.:* 51° e 129°.
6. Duas paralelas são cortadas por uma transversal formando dois ângulos colaterais externos, a e b. Sendo $a = 5x - 12°$ e $b = 3x + 12°$, calcular os ângulos da figura. *Resp.:* 100°30′ e 79°30′.
7. Os ângulos a e b, formados por duas paralelas com uma transversal são alternos internos. Calcular os ângulos dados, sendo $a = 5x + 30$ e $b = 2x + 48°30'24''$. *Resp.:* 60°50′40″.
8. Sendo dois ângulos colaterais internos formados por duas paralelas e valendo um a têrça parte do outro, calcular os mesmos ângulos. *Resp.:* 45° e 135°.
9. Dois ângulos são colaterais internos e um dêles tem mais 46°26′ que o outro. Calcule os dois ângulos. *Resp.:* 66°47′ e 113°13′.
10. Dois ângulos são colaterais externos e um dêles vale 2/3 do outro. Calcule os dois ângulos. *Resp.:* 108° e 72°.
11. O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo divide ao meio a mediana relativa ao terceiro lado e é, também, por ela dividido em partes iguais. Provar.
12. Provar que a bissetriz do ângulo externo, formado no vértice de um triângulo isósceles é paralela à base.
13. As perpendiculares traçadas das extremidades de um dos lados de um triângulo à mediana do mesmo lado são iguais e paralelas. Provar.
14. Num triângulo retângulo a mediana traçada do vértice do ângulo reto é igual à metade da hipotenusa e divide o triângulo em dois triângulos isósceles. Provar.
15. ABC é um triângulo escaleno. M é a intersecção das bissetrizes internas dos ângulos A e B. Pelo ponto M traça-se uma paralela a AB. Sejam D e E as intersecções da paralela com AC e BC. Provar que DE é igual à soma de AD com BE.

VII — SOMA DOS ÂNGULOS DO TRIÂNGULO E DOS POLÍGONOS

43. Soma dos ângulos de um triângulo. Lei de Tales.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Tese: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo vértice B, tracemos a reta S paralela a AC (fig. 58). Em virtude das propriedades dos ângulos, podemos concluir:

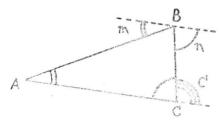



FIG. 58

$$m + B + n = 180° \quad (1)$$

Porém m é igual a A e n igual a C, como ângulos alternos internos de retas paralelas; l o g o, substituindo em (1) m e n por seus iguais, teremos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

Êste princípio é conhecido pelo nome de ***lei angular de Tales.***

CONSEQÜÊNCIAS DA LEI ANGULAR DE TALES:

Primeira. ***Cada ângulo de um triângulo é suplemento da soma dos outros dois.*** Realmente, de $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$ conclui-se $\hat{B}+\hat{C} = 180 - \hat{A}$.

Segunda. ***Se dois triângulos tiverem dois ângulos respectivamente iguais, os terceiros ângulos serão também iguais.***

Terceira. ***O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes.*** Realmente, em virtude da lei de Tales, temos (fig. 58):

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

donde:

$$180° - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}.$$

Como o suplemento de C é o ângulo externo C', vem:

$$C' = A + B.$$

Quarta. ***A soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°.*** Se cada ângulo externo é a soma de dois internos, a soma dos externos será o dôbro da dos internos isto é, valerá 360°.

Quinta. ***Num triângulo qualquer pelo menos dois ângulos são agudos.***

Sexta. ***Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.***

Sétima. ***Cada ângulo de um triângulo eqüilátero tem 60°.***

OBSERVAÇÃO. Em virtude da segunda conseqüência da lei angular de Tales, o primeiro caso de igualdade de triângulos pode ser enunciado:

Dois triângulos são iguais quando têm um lado e dois ângulos respectivamente iguais.

44. Soma dos ângulos internos de um polígono.

A soma dos ângulos internos de um polígono vale tantas vêzes dois retos quantos são os lados menos dois.

Sendo n o número de lados, se representarmos por S_i a soma dos ângulos internos, teremos:

$$S_i = (n - 2)180°.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se unirmos um ponto interior aos vértices, o polígono de n lados ficará decomposto em n triângulos (fig. 59), porque cada lado servirá de base a um triângulo.

A soma dos ângulos internos do polígono será a soma dos ângulos dos n triângulos, excetuados os ângulos, cujo vértice é o ponto interior considerado, e que valem ao todo 360°; assim, temos

$$S_i = n \cdot 180° - 360°$$

ou, colocando 180° em evidência:

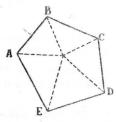



Fig. 59

$$\boxed{S_i = (n-2)\,180^\circ} \quad (1)$$

Observação. Se o polígono fôr regular, todos os ângulos internos são iguais; logo, o valor de cada ângulo será dado pela fórmula:

$$\boxed{a_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}} \quad (2)$$

Exemplos:

1.º) A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo será:

$$S_i = (5-2)\ 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ.$$

2.º) O ângulo interno do decágono regular convexo valerá:

$$a_i = \frac{(10-2)\ 180^\circ}{10} = \frac{8 \times 180^\circ}{10} = 144^\circ.$$

Soma dos ângulos externos de um polígono.

> **A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a 360º.**

Demonstração. Prolongando todos os lados do polígono no mesmo sentido (fig. 60), os ângulos externo e interno formados em cada vértice são suplementares; logo, a soma de todos os ângulos, tanto internos como externos, valerá $n \times 180^\circ$

Assim, temos: $S_i + S_e = n \times 180^\circ$.

Substituindo S_i por seu valor, resulta:

$$(n-2)\ 180^\circ + S_e = n \times 180^\circ$$

ou, $$n \times 180^\circ - 360^\circ + S_e = n \times 180^\circ$$

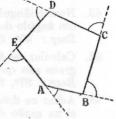



Fig. 60

donde, finalmente, transpondo e reduzindo os têrmos:

$$\boxed{S_e = 360^\circ}$$

Observação. Se o polígono fôr regular, os ângulos externos serão todos iguais; logo, o valor de cada um será dado pela fórmula:

$$\boxed{a_e = \frac{360}{n}}$$

EXERCÍCIOS

1. Dois ângulos de um triângulo valem, respectivamente, 39º18′45″ e 54º27′15″. Calcular o terceiro ângulo. *Resp.*: 86º14′.
2. Calcular os ângulos da base de um triângulo isósceles, sabendo que o ângulo do vértice vale 67º18′. *Resp.*: 56º21′.
3. Calcular os ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo que o menor é um têrço do maior. *Resp.*: 67º30′ e 22º30′.
4. O ângulo externo B' de um triângulo ABC mede 135º e o ângulo interno C, 60º. Calcular os ângulos internos A e B. *Resp.*: 75º e 45º.
5. Calcular os ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo-se que a sua diferença é de 23º18′30″. *Resp.*: 56º39′15″ e 33º20′45″.
6. Os três ângulos de um triângulo têm para expressão, respectivamente, $x + 36^\circ$, $2x - 15^\circ$ e $3x - 39^\circ$. Calcular os três ângulos. *Resp.*: 69º, 51º e 60º.
7. Num triângulo, o primeiro ângulo é o dôbro do segundo e êste, um têrço do terceiro. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.*: 60º, 30º e 90º.
8. Calcular os ângulos de um triângulo isósceles, onde um dos ângulos externos da base tem 113º58′. *Resp.*: 66º2′ e 47º56′.
9. Num triângulo isósceles a altura principal forma com o lado um ângulo de 18º25′30″. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.*: 36º51′ e 71º34′30″.
10. Num triângulo escaleno cada ângulo excede o precedente de 20º. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.*: 40º, 60º e 80º.
11. Num triângulo ABC, o ângulo A vale 3/5 do ângulo B e 2/3 de C. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.*: 43º12′ 72º e 64º48′.

12. Calcular os ângulos de um triângulo, onde o primeiro excede o segundo de 14°36′ e o segundo excede o terceiro de 28°. *Resp.:* 79°4′, 64°28′ e 36°28′.

13. Num triângulo ABC os ângulos medem respectivamente 20°, 50° e 110°. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes externas traçadas dos vértices B e C, e o ângulo formado pela bissetriz interna de B com a bissetriz externa de C'. *Resp.:* 80° e 10°.

14. O ângulo obtuso formado por duas bissetrizes internas de um triângulo é igual a um reto aumentado da metade do terceiro ângulo. Provar.

15. O ângulo formado por duas bissetrizes externas de um triângulo é igual a um reto, diminuído da metade do terceiro. Provar.

16. O ângulo formado pela bissetriz com a altura, traçadas do mesmo vértice de um triângulo, é igual à semidiferença dos ângulos da base. Provar.

17. O ângulo formado por uma bissetriz interna de um triângulo com a externa de um ângulo não adjacente ao primeiro é igual à metade do terceiro. Provar.

18. Num triângulo ABC, a altura traçada do vértice A forma com a bissetriz de A um ângulo de 18°. As bissetrizes internas de B e C cortam-se segundo um ângulo de 130°. Calcular os ângulos do triângulo *Resp.:* 80°, 68° e 32°.

19. Num triângulo ABC são dados: B = 79°36′ e C = 60°24″. Calcular o ângulo formado pela bissetriz interna de B com a externa de C. *Resp.:* 20°11′48″.

20. Num triângulo ABC, a bissetriz externa CF forma com a bissetriz interna BF um ângulo de 10° e a altura AH forma com a bissetriz interna AS um ângulo de 30°. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.:* 20°, 110° e 50°.

21. Num triângulo ABC, a altura AH forma com a bissetriz interna AS um ângulo de 20° e as bissetrizes dos ângulos externos em B e C formam um ângulo de 30°. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.:* 120°, 50°, 10°.

22. A mediana de um triângulo é igual à metade do lado sôbre o qual é traçada. Provar que o triângulo é retângulo.

23. Calcular a soma dos ângulos internos de um octógono. *Resp.:* 1 080°.

24. Calcular o número de lados de um polígono regular, cujo ângulo interno tem 150°. *Resp.:* 12.

25. Achar o polígono regular, cujo ângulo externo tem 45°. *Resp.:* octógono.

26. Achar o polígono regular, cujo ângulo interno é o dôbro do externo. *Resp.:* hexágono.

27. Calcular o ângulo interno de um pentágono regular. *Resp.:* 108°.

28. Calcular o ângulo externo de um pentadecágono regular. *Resp.:* 24°.

29. Calcular o ângulo interno de um polígono regular que tem 35 diagonais. *Resp.:* 144°.

30. Calcular a soma dos ângulos internos de um polígono, cujo número de lados é 2/3 do número de diagonais. *Resp.:* 720°.

31. Num polígono regular $ABCDE\ldots$, a diagonal AC forma com o lado BC um ângulo de 30°. Calcular o número de lados e de diagonais do polígono. *Resp.:* 6 e 9.

32. Num polígono regular as mediatrizes de dois lados consecutivos formam um ângulo de 45°. Achar o polígono. *Resp.:* octógono.

33. A diferença entre os ângulos interno e externo de um mesmo polígono regular é de 132°. Achar o polígono. *Resp.:* pentadecágono.

34. A razão entre o ângulo externo e o interno do mesmo polígono regular é 1/4. Achar o polígono. *Resp.:* decágono.

35. A razão entre os ângulos internos de dois polígonos regulares é 3/4 e um dêles tem o dôbro de lados do outro. Achar os polígonos. *Resp.:* pentágono e decágono.

36. A razão entre os ângulos internos de dois polígonos regulares é 3/5 e um dêles tem o triplo de lados do outro. Achar os polígonos. *Resp.:* quadrado e dodecágono.

37. Num quadrilátero $ABCD$, cada ângulo excede o precedente de 20°. Calcular os ângulos do quadrilátero. *Resp.:* 60°, 80°, 100° e 120°.

38. Num triângulo ABC, o primeiro ângulo vale os 2/3 do segundo, aumentados de 48°, e o segundo vale os 3/5 do terceiro. Achar os ângulos do triângulo. *Resp.:* 74°24′, 39°36′ e 66°.

39. Calcular os ângulos de um triângulo, sabendo que são proporcionais aos números 2, 3 e 5. *Resp.:* 36°, 54° e 90°.

40. Calcular os três ângulos de um triângulo, os quais são inversamente proporcionais aos números 2, 3/2 e 6/5. *Resp.:* 45°, 60° e 75°.

41. Os ângulos de um quadrilátero são proporcionais aos números 2, 3, 6 e 7. Calculá-los. *Resp.:* 40°, 60°, 120° e 140°.

42. Num triângulo ABC, o ângulo A tem mais 24° que o ângulo B e menos 36° que C. Achar os ângulos do triângulo. *Resp.:* 32°, 56° e 92°.

43. Num triângulo ABC, as bissetrizes internas dos ângulos B e C formam um ângulo de 120° e êstes ângulos diferem de 40°. Achar os ângulos. *Resp.:* 40°, 60° e 80°.

44. Calcular os ângulos internos de um quadrilátero, cujas medidas em graus são quatro números ímpares consecutivos. *Resp.:* 87°, 89°, 91° e 93°.

45. Achar os dois polígonos regulares, cujos ângulos internos estão entre si na razão de 3 para 5 e os números de lados na razão 1/3. *Resp.:* quadrado e dodecágono.

VIII — QUADRILÁTEROS CONVEXOS

45. Classificação. Os *quadriláteros* dividem-se em três grupos: *trapezóides, trapézios* e *paralelogramos.*

Trapezóide é o quadrilátero que não tem lados paralelos.

Trapézio é o que tem dois lados paralelos e só dois. Êstes lados paralelos são denominados *bases* do trapézio.

Paralelogramo é o quadrilátero cujos lados são paralelos dois a dois.

46. Paralelogramo. Entre os paralelogramos distinguem-se:

a) o *rombóide* ou *paralelogramo* pròpriamente dito;

b) o *losango* ou *rombo,* paralelogramo cujos lados são iguais;

c) o *retângulo,* cujos ângulos são retos, e, portanto, iguais;

d) o *quadrado,* cujos lados são iguais e os ângulos são também iguais. É o quadrilátero regular.

47. Propriedades características do paralelogramo. O paralelogramo goza de propriedades características, isto é, por meio das quais podemos afirmar que um quadrilátero dado é paralelogramo.

1.ª) **Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.**

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 61).

Por definição, temos: $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$.

Como os segmentos paralelos compreendidos entre paralelas são iguais, conclui-se: $AB = CD$ e $BC = AD$.

Recíproca.

Todo quadrilátero que tem os lados opostos iguais, é paralelogramo.

Fig. 61

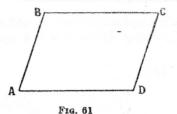
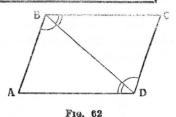



Fig. 62

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 62).

Hip.: $\begin{cases} AB = CD \\ BC = AD \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD. \end{cases}$

Demonstração. Tracemos a diagonal BD. Os dois triângulos ABD e BCD são congruentes, por terem os três lados respectivamente iguais. Logo, os ângulos ABD e BDC são iguais e, como são alternos internos, AB é paralela a CD. Da mesma forma, a igualdade dos ângulos CBD e ADB acarreta o paralelismo dos lados AD e BC.

2.ª) **Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.**

Os ângulos opostos têm os lados respectivamente paralelos e dirigidos em sentidos opostos; logo, são iguais.

Recíproca.

Todo quadrilátero, cujos ângulos opostos são iguais, é paralelogramo.

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 63).

Hip.: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD. \end{cases}$

Demonstração. Em virtude da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ.$$

Como, por hipótese, os ângulos A e C são iguais, bem como $\hat{B}$ e $\hat{D}$, concluímos:

$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 360°.$$

donde,

$$\hat{A} + \hat{B} = 180°.$$

Assim, os ângulos A e B são suplementares e, como são colaterais internos em relação às retas BC e AD e à secante AB, resulta:

$$BC \parallel AD.$$

Fig. 63

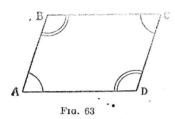
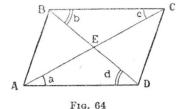



Fig. 64

Anàlogamente demonstraremos o paralelismo dos dois outros lados opostos, e o quadrilátero é um paralelogramo.

3.ª) **As diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.**

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 64).

Hip.: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} AE = CE \\ BE = DE. \end{cases}$

Demonstração. Os triângulos AED e BEC são congruentes, em virtude do 1.º caso, porque os lados AD e BC são iguais (primeira propriedade), e os ângulos a e d são, respectivamente, iguais a c e b, como alternos internos.

Da congruência dos triângulos resulta:

$$AE = CE$$
$$BE = DE.$$

Recíproca.

Todo quadrilátero, cujas diagonais se cortam ao meio, é um paralelogramo.

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 64). Temos:

Hip.: $\begin{cases} AE = CE \\ BE = DE \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD. \end{cases}$

Demonstração. Os triângulos AED e BEC são congruentes em virtude do segundo caso, por terem um ângulo igual (os ângulos em E como opostos pelo vértice), formado por lados respectivamente iguais por hipótese.

Da congruência dos triângulos resulta:

$$a = c$$

e, por conseguinte, AD e BC são paralelas, por formarem, com a secante AC, ângulos alternos internos iguais.

Anàlogamente demonstraremos o paralelismo dos dois outros lados, considerando os triângulos AEB e CED.

Observação. O ponto E é o *centro* de simetria do paralelogramo. Tôda reta que passa pelo centro fica dividida em partes iguais pelo contôrno do quadrilátero e o divide em dois trapézios iguais.

4.ª) **Todo quadrilátero que tem dois lados opostos iguais e paralelos é paralelogramo.**

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 65).

Hip.: $\begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$ Tese: $BC \parallel AD.$

Demonstração. Tracemos a diagonal AC (fig. 65). Os triângulos ABC e ACD são congruentes, em virtude do segundo caso, porque o lado AC é comum, os lados AB e CD são iguais por hipótese, e os ângulos a e c são iguais como alternos internos. Da congruência dos triângulos resulta:

$$\hat{m} = \hat{n},$$

e, por conseguinte, os lados AD e BC são paralelos, o que demonstra a tese.

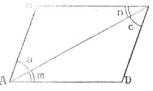



Fig. 65

Observação. Observemos que as recíprocas das propriedades estabelecem *condições de suficiência*, isto é, são *condições suficientes* para que um quadrilátero seja paralelogramo. De um modo geral, as recíprocas são *condições de suficiência*.

48. Propriedade característica do retângulo.

As diagonais do retângulo são iguais.

Seja o retângulo $ABCD$ (fig. 66).

Tese: $AC = BD$.

Demonstração. Os triângulos BAD e ADC são congruentes por terem os catetos respectivamente iguais (AD comum; $AB = CD$, como lados opostos de paralelogramo). Da congruência dos triângulos resulta:

$$AC = BD.$$

Recíproca.

O paralelogramo que tem diagonais iguais é retângulo.

Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 66).

Hip.: $AC = BD$ Tese: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

Demonstração. Os triângulos BAD e ADC são congruentes por terem os três lados respectivamente iguais ($AC = BD$ por hipótese, e os outros como lados opostos de paralelogramo). Logo, os ângulos BAD e ADC são iguais, isto é:

$$\hat{A} = \hat{D}$$

Como os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais, temos, ainda:

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{e} \quad \hat{D} = \hat{B}.$$

Concluímos, finalmente:

$$\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D} = 90°$$

e o paralelogramo é retângulo.

Aplicação. ***A mediana, traçada do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo, é igual à metade da hipotenusa.***

Fig. 66

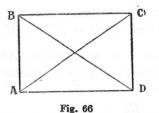
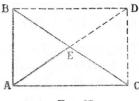



Fig. 67

Seja o triângulo retângulo BAC (fig. 67). Completemos o retângulo $BACD$ e tracemos a diagonal AD. Como as diagonais cortam-se ao meio e são iguais, AE é mediana de BAC, e temos:

$$AE = \frac{BC}{2}.$$

49. Propriedade característica do losango.

As diagonais do losango são perpendiculares entre si e são bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.

Seja o losango $ABCD$ (fig. 68).

Hip.: $AB = BC = CD = DA$, Tese: $\begin{cases} AC \perp BD \\ a = b \\ c = d \end{cases}$

Demonstração. Em virtude da hipótese, os triângulos ABD e BDC são isósceles.

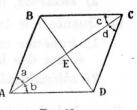
Como as diagonais cortam-se ao meio, a diagonal AC é mediana dêstes triângulos e, conseqüentemente, é também altura e bissetriz. Assim, conclui-se:

$$AC \perp BD, \quad a = b, \quad c = d.$$

Fig. 68

Anàlogamente demonstraremos que a diagonal BD é bissetriz dos ângulos B e D.

Recíproca.

Todo paralelogramo, cujas diagonais são perpendiculares, é losango.

Hip.: $AC \perp BD$ Tese: $AB = BC = CD = DA$.

DEMONSTRAÇÃO. De acôrdo com a hipótese AC é mediatriz de BD (fig. 68); logo, qualquer de seus pontos é eqüidistante de B e D, concluindo-se:

$$AB = AD \quad e \quad BC = CD.$$

Como os lados opostos do paralelogramo são iguais, temos, ainda:

$$AB = CD.$$

Das três igualdades resulta:

$$AB = AD = CD = BC.$$

50. Propriedade do quadrado. O quadrado tem os lados iguais e os ângulos retos, é, pois, simultâneamente, losango e retângulo. Desta forma, as diagonais são iguais, são perpendiculares entre si e são bissetrizes dos ângulos internos.

Recìprocamente, todo paralelogramo, cujas diagonais são iguais e perpendiculares, é um quadrado.

51. Trapézios.

a) Quanto aos lados, os trapézios classificam-se:

1) *isósceles*, que têm os lados não paralelos iguais.

2) *escalenos*, que têm os lados não paralelos desiguais.

b) Quanto aos ângulos, os trapézios classificam-se:

1) *trapézios retângulos*, que têm dois ângulos retos, isto é, um dos lados é perpendicular às bases.

2) *obliquângulos*, que não têm ângulos retos.

Propriedades dos trapézios.

1.ª) **No trapézio isósceles os ângulos contíguos à mesma base são iguais.**

Seja o trapézio isósceles $ABCD$ (fig. 69).

Hip.: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AB = CD \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{C}. \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos CE paralela a AB. O quadrilátero $ABCE$ será, por construção, um paralelogramo, concluindo-se:

$$CE = AB.$$

Como AB é, por hipótese, igual a CD, o triângulo CDE é isósceles, e, por conseguinte, o ângulo D é igual a CED. Como êste último é correspondente a A em relação à secante AD, resulta:

$$\hat{D} = \hat{A}.$$

Finalmente, B e C são iguais como suplementos dos ângulos iguais A e D.

2.ª) **O segmento determinado pelos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.**

FIG. 69

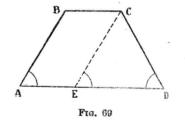
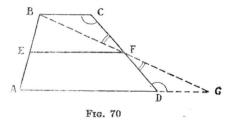



FIG. 70

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 70).

Hip.: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AE = EB \\ DF = FC \end{cases}$ Tese: $\begin{cases} EF \parallel AD \parallel BC \\ EF = \dfrac{AD + BC}{2} \end{cases}$

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos BF e prolonguemo-lo até a intersecção G com o prolongamento de AD. Os dois triângulos DFG e FBC são congruentes em virtude do primeiro caso, porque:

$$DF = FC \text{ (3.ª hipótese)}$$
$$\hat{C} = \widehat{G\hat{D}F} \text{ (alternos internos)}$$
$$\widehat{BFC} = \widehat{DFG} \text{ (opostos).}$$

Da congruência dos triângulos resulta: $DG = BC$; logo,
$$AG = AD + BC.$$

O ponto F é meio de BG em virtude da congruência citada; logo, no triângulo ABG, o segmento EF é paralelo ao lado AG e igual à sua metade. Assim:
$$EF \parallel AD \parallel BC$$

e $$EF = \frac{AG}{2} \text{ ou } EF = \frac{AD + BC}{2}$$

Observação. O segmento EF é denominado *base média* ou *mediana do trapézio.*

3.ª) **O segmento da base média de um trapézio compreendido entre as duas diagonais é igual à semidiferença das bases.**

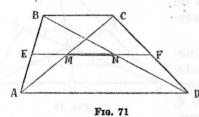



Fig. 71

Seja o trapézio $ABCD$ (fig. 71) e EF a base média.

Tese: $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Em virtude da propriedade anterior, EF é paralelo a AD e BC.

Logo, de acôrdo com as propriedades dos triângulos podemos concluir:

1.º) considerando o triângulo ABD: $EN = \dfrac{AD}{2}$

2.º) considerando o triângulo ABC: $EM = \dfrac{BC}{2}$

Subtraindo, membro a membro, resulta: $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Observação. O segmento MN é a base média do *trapézio cruzado* $ACBD$.

52. Retas concorrentes no triângulo.

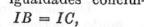
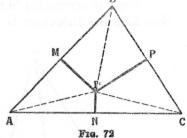
1.º) **As mediatrizes dos três lados de um triângulo concorrem no mesmo ponto, eqüidistante dos três vértices.**

Seja o triângulo ABC e tracemos as mediatrizes MI e NI dos lados AB e AC (fig. 72). O ponto I é eqüidistante de A e B, por estar na mediatriz MI; assim: $IA = IB$.

Da mesma forma, o ponto I é eqüidistante dos pontos A e C, por estar na mediatriz de AC; assim: $IA = IC$.

Das duas igualdades conclui-se:

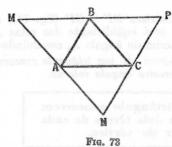
$$IB = IC,$$

Fig. 72

e, portanto, o ponto I pertence à mediatriz de BC, por ser eqüidistante de seus extremos.

O ponto I denomina-se ***circuncentro.***

2.º) **As três alturas de um triângulo concorrem no mesmo ponto.**

Seja o triângulo ABC (fig. 73). Tracemos, de cada vértice, uma paralela ao lado oposto. Fica formado o triângulo MNP, cujos pontos médios dos lados são os vértices A, B e C, do triângulo dado.

Fig. 73

Realmente, temos, por exemplo:
$$AM = AN$$
por serem ambos iguais a BC, como segmentos paralelos compreendidos entre paralelas.

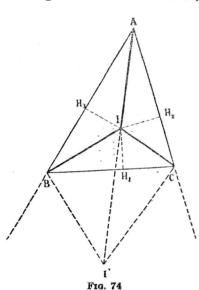
Assim, as alturas do triângulo ABC serão as *mediatrizes* dos lados do triângulo MNP e, con-

seqüentemente, concorrem no mesmo ponto, em virtude da propriedade anterior.

O ponto de intersecção das alturas denomina-se ***ortocentro.***

3.º) **As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem num mesmo ponto.**

Seja o triângulo ABC (fig. 74). Tracemos as bissetrizes dos ângulos internos B e C; seja I o ponto de intersecção.

Fig. 74

Como o ponto I pertence à bissetriz do ângulo B, é eqüidistante de seus lados, isto é:

$$IH_1 = IH_3.$$

Da mesma forma, como o ponto I pertence à bissetriz do ângulo C, conclui-se:

$$IH_1 = IH_2.$$

Das duas igualdades resulta:

$$IH_2 = IH_3.$$

Assim, o ponto I é eqüidistante dos lados do ângulo A e pertence à sua bissetriz.

O ponto I denomina-se ***incentro.***

Observação. Se traçarmos as bissetrizes BI' e CI' (fig. 74), dos ângulos externos em B e C, o ponto I' será eqüidistante das retas AB e AC e pertencerá também à bissetriz interna do ângulo A, concluindo-se:

As bissetrizes de dois ângulos externos de um triângulo concorrem num ponto situado sôbre a bissetriz do terceiro ângulo interno.

4.º) **As três medianas de um triângulo concorrem no mesmo ponto, situado a dois têrços de cada uma delas, a partir do vértice.**

Seja o triângulo ABC (fig. 75). Tracemos as duas medianas BD e CE; seja I o ponto de intersecção.

Como D e E são, por hipótese, pontos médios de dois lados do triângulo ABC, conclui-se:

$$DE \parallel BC \quad \text{e} \quad DE = \frac{BC}{2} \qquad (1)$$

Tomando os pontos médios F e G de BI e CI e traçando FG, concluiremos, da mesma forma, no triângulo BIC:

$$FG \parallel BC \quad \text{e} \quad FG = \frac{BC}{2} \qquad (2)$$

Das relações (1) e (2) resulta:

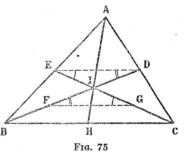
$$DE \parallel FG \text{ e } DE = FG;$$

logo, $EDGF$ é paralelogramo, e conclui-se:

$$DI = FI = BF \quad \text{e} \quad EI = IG = GC.$$

Fig. 75

Assim, as duas medianas ficam divididas em três partes iguais e o ponto I fica situado a 2/3 de cada uma delas, a partir do vértice.

Se traçarmos a terceira mediana, provaremos, anàlogamente, que cortará a primeira BD, num ponto situado a 2/3 de B, isto é, no ponto I, o que prova o teorema.

O ponto de intersecção das medianas denomina-se ***baricentro.***

EXERCÍCIOS

1. A diferença entre dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é de 100°. Calcular os ângulos do paralelogramo. *Resp.:* 40° e 140°.
2. Dois ângulos opostos de um paralelogramo têm para medidas, em graus, as expressões $4x + 28°17'$ e $6x - 42°13'$. Calcular os ângulos de paralelogramo. *Resp.:* 10°43′ e 169°17′.
3. Em um paralelogramo os ângulos obtusos são o dôbro dos agudos Calcular os ângulos do paralelogramo. *Resp.:* 60° e 120°.

4. Em um paralelogramo, cada ângulo agudo vale 2/3 de cada um obtuso Calcular os ângulos do paralelogramo. *Resp.:* 108° e 72°.
5. Num trapézio isósceles os ângulos obtusos adjacentes à mesma base têm suas medidas expressas respectivamente pelos polinômios $4x - 45°$ e $2x + 38°$. Calcular os ângulos. *Resp.:* 121° e 59°.
6. Num quadrilátero, dois ângulos consecutivos têm por medida, respectivamente, 60° e 48°30′. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos dois outros ângulos internos. *Resp.:* 54°15′.
7. Num quadrilátero *ABCD*, os ângulos internos *C* e *D* valem, respectivamente, 93° 18′ e 65°42′. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos externos em *A* e *B*. *Resp.:* 100°30′.
8. Num quadrilátero *ABCD* os ângulos *A* e *B* são iguais e suas bissetrizes formam um ângulo de 50°. Calcular os ângulos do quadrilátero, sabendo que a diferença entre os ângulos *C* e *D* é de 20°18′30″. *Resp.:* 130°, 130°, 60°9′15″ e 39°50′45″.
9. Num trapézio retângulo *MNPQ*, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de *M* e *Q* mede 105°. Calcular os ângulos do trapézio, sendo *M* e *N* os ângulos retos. *Resp.:* 90°, 90°, 60° e 120°.
10. As bissetrizes dos ângulos adjacentes à base maior de um trapézio isósceles cortam-se formando um ângulo de 110°. Calcular os ângulos do trapézio. *Resp.:* 70° e 110°.
11. Num quadrilátero cada ângulo é o dôbro de seu precedente. Calcular os ângulos do quadrilátero. *Resp.:* 24°, 48°, 96° e 192°.
12. Num quadrilátero dois ângulos são iguais e valem a metade do que os precede e o dôbro do que se lhes segue. Calcular os ângulos do quadrilátero. *Resp.:* 40°, 80°, 80° e 160°.
13. O perímetro de um retângulo é igual ao de um quadrado, cujo lado tem 6m. Calcular as dimensões do retângulo, cuja altra é 2/3 da base. *Resp.:* 7,2m e 4,8m.
14. As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, 40cm e 60cm e os ângulos agudos valem a metade dos obtusos. Calcular o perímetro do trapézio. *Resp.:* 140cm.
15. Calcular o perímetro de um losango onde a diagonal menor mede 4,5dm e a soma dos ângulos obtusos é o dôbro da dos agudos. *Resp.:* 18dm.
16. A soma de dois lados opostos de um paralelogramo é 2/5 do perímetro que vale 108cm. Calcular os lados do paralelogramo. *Resp.:* 21,6cm e 32,4cm.
17. Num triângulo isósceles *ABC* o perímetro tem 16,85m. As medianas traçadas de *A* e *C* cortam-se num ponto *I* e a soma de seus comprimentos é de 7,5m. O perímetro do triângulo *AIC* é de 8m. Calcular os lados *a*, *b* e *c* do triângulo *ABC*, sendo $a = c$. *Resp.:* 3m e 6,925m.
18. A mediana de um trapézio mede 20dm e a base menor é 3/7 da maior. Calcular as bases. *Resp.:* 12dm e 28dm.

19. Dois dos ângulos de um trapézio medem respectivamente 60° e 100° Calcular os dois outros ângulos do trapézio. *Resp.:* 120° e 80°.
20. A mediana de um trapézio mede 28dm e uma das bases mede 36dm. Quanto mede a outra base? *Resp.:* 20dm.
21. Num trapézio retângulo os ângulos adjacentes à base menor medem 90° e 118°, respectivamente. Classificar o trapézio e calcular os ângulos adjacentes à base maior. *Resp.:* 90° e 62°.

Demonstrar os teoremas:

22. Em todo quadrilátero, as bissetrizes de dois ângulos internos consecutivos formam um ângulo igual à semi-soma dos outros dois.
23. As bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas.
24. Todo segmento que passa pelo centro de um paralelogramo (ponto de intersecção das diagonais) e é limitado pelo contôrno do polígono, fica dividido ao meio pelo mesmo ponto.
25. Unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer, obtém-se um paralelogramo.
26. As bissetrises dos ângulos internos de um quadrilátero formam um segundo quadrilátero, cujos ângulos opostos são suplementares.
27. As diagonais de um trapézio isósceles são iguais.
28. O trapézio que tem as diagonais iguais é isósceles.
29. Os segmentos determinados pelos pontos médios dos lados de um triângulo tomados dois a dois, dividem o triângulo em quatro triângulos iguais.
30. A soma das perpendiculares traçadas de um ponto qualquer da base de um triângulo isósceles sôbre os lados é igual à altura de um dos lados iguais.

IX — CÍRCULO

53. Definições.

> **Circunferência de círculo ou circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano, situados a uma distância dada de um ponto dado do mesmo plano.**

O ponto dado chama-se ***centro*** e a distancia dada, ***raio***.

Da definição conclui-se:

1.°) *duas circunferências do mesmo raio podem coincidir por superposição, isto é, são congruentes;*

2.°) *se fizermos rotação de uma circunferência em tôrno do centro, a mesma não deixa de coincidir com ela própria.*

A circunferência divide o plano em duas regiões, uma interior denominada *círculo* e outra exterior, sem denominação própria.

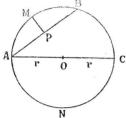



Fig. 76

c) ***Arco*** é uma parte qualquer da circunferência, limitada por dois pontos que são denominados *extremidades* do arco.

Exemplo: AB (fig. 76).

d) ***Corda.*** O segmento de reta determinado pelas extremidades de um arco, como AB na figura 76 é denominado *corda*. Diz-se que a corda *subtende* o arco, e, recìprocamente, o arco é subtendido pela corda. Uma corda subtende, realmente, dois arcos, como AMB e ANB na figura 76. Salvo indicação em contrário, considera-se sempre o menor dos dois arcos subtendidos pela mesma corda.

e) ***Diâmetro*** é a corda que passa pelo centro, como AC na figura 76. O diâmetro é o dôbro do raio, isto é, $d = 2r$.

f) ***Flecha*** é o segmento determinado pelos pontos médios da corda e do arco subtendido, MP na figura 76.

54. O ponto em relação à circunferência. Um ponto do plano pode ocupar em relação à circunferência três posições:

1.ª) O ponto é *exterior*. Neste caso sua distância ao centro é maior que o raio: $P_1O > r$ (fig. 77).

2.ª) O ponto é da *curva* ou *ponto aferente*. Seja P_2. A distância ao centro é igual ao raio: $P_2O = r$.

3.ª) O ponto é *interior*. Seja P_3. Neste caso $P_3O < r$.

Assim, a posição de um ponto P, em relação à circunferência, fica determinada por uma das três relações: $PO > r$, $PO = r$ ou $PO < r$.

55. Distância do ponto à circunferência.

> **O menor segmento retilíneo que se pode traçar de um ponto a uma circunferência do mesmo plano, é o segmento do raio, ou de seu prolongamento, compreendido entre o ponto e a curva.**

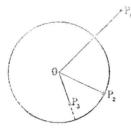



Fig. 77

Fig. 78

DEMONSTRAÇÃO. Podemos considerar dois casos.

Primeiro caso. ***O ponto é exterior.*** Seja P_1 (fig. 78).

Considerando um ponto qualquer B da circunferência, e traçando P_1B temos a tese:

$$P_1A < P_1B.$$

O triângulo P_1OB permite concluir:

$$P_1A + AO < P_1B + BO$$

ou, por ser $BO = AO$, podemos simplificá-los:

$$P_1A < P_1B.$$

Segundo caso. ***O ponto é interior.*** Seja P_2 (fig. 78).

Temos, anàlogamente, a tese:

$$P_2A < P_2B.$$

O triângulo P_2OB permite concluir:

$$OB < OP_2 + P_2B$$

Como $OB = OA = OP_2 + P_2A$:

$$OP_2 + P_2A < OP_2 + P_2B$$

Simplificando: $P_2A < P_2B$

Aplicação. ***A distância de um ponto a uma circunferência é o menor segmento compreendido entre o ponto e a curva. A determinação dessa distância é, pois, uma aplicação imediata da propriedade estudada.***

56. A reta em relação à circunferência.

> **Uma reta não pode ter mais de dois pontos comuns com a circunferência.**

Realmente, se pudesse ter três pontos comuns, por exemplo, as distâncias dêsses pontos ao centro seriam iguais, como raios do mesmo círculo. Haveria, assim, do centro à reta dada, três segmentos iguais, o que é impossível.

Resulta dessa proposição, que uma reta pode ocupar *três* posições em relação à circunferência :

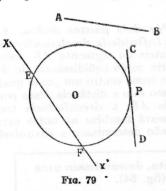



Fig. 79

1.ª) ***Exterior.*** Não tendo ponto algum comum com a circunferência, como AB na fig. 79.

2.ª) ***Tangente.*** Tendo um ponto comum com a circunferência, como CD na fig. 79. O ponto comum P é o *ponto de contacto* ou *ponto de tangência.*

3.ª) ***Secante.*** Tendo dois pontos comuns com a circunferência como EF na fig. 79.

Excluída a primeira posição, em que a reta nenhuma propriedade tem em relação à circunferência, estudaremos as propriedades correspondentes às duas outras, isto é, às tangentes e secantes, podendo ser as desta última relativas aos diâmetros ou às cordas.

57. Propriedade da tangente.

> **A tangente é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.**

Hip.: Seja a tangente TT' e A o ponto de contacto (fig. 80)

Tese: $TT' \perp OA$.

Demonstração. Qualquer ponto da tangente, a não ser A, é exterior. Assim, sendo M um ponto qualquer da tangente, teremos:

$$OM > OA.$$

OA é, pois, o menor segmento traçado do ponto O à reta TT'; logo, OA é perpendicular a TT'.

Recíproca.

> **A reta perpendicular à extremidade de um raio é tangente.**

Hipótese: $TT' \perp OA$ Tese: TT' é tangente.

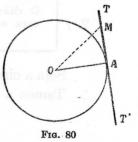
Demonstração. OA é perpendicular a TT' (fig. 80); logo, qualquer outra reta OM será oblíqua e concluiremos:

$$OM > OA.$$

O ponto qualquer M é, pois, exterior; resulta que A é o único ponto comum e a reta TT', tangente.

Aplicação. Da propriedade e sua recíproca, conclui-se que ***para uma reta ser tangente, a condição necessária e suficiente é ser ela perpendicular à extremidade do raio.***

Fig. 80

Como de um ponto A (fig. 80) só se pode traçar uma perpendicular à reta OA, conclui-se: *de um ponto dado da circunferência pode-se traçar apenas uma tangente.*

58. Normal. Chama-se *normal* a uma curva, em um ponto dado dessa curva, a perpendicular à tangente nesse ponto. A normal à circunferência em um ponto é, portanto, em virtude da propriedade da tangente, a reta que contém o raio traçado por êsse ponto.

Na figura 80 a normal à circunferência no ponto A é o suporte do raio OA.

59. Propriedades do diâmetro.

1.ª) **Todo diâmetro é um eixo de simetria da circunferência.**

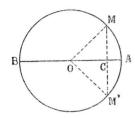



Fig. 81

Demonstração. Seja a circunferência O e um diâmetro qualquer AB (fig. 81).

Considerando um ponto qualquer M, tracemos MM' perpendicular a AB; os triângulos retângulos OCM e OCM' são congruentes por terem o cateto OC comum e as hipotenusas iguais. Da congruência dos triângulos resulta: $MC = M'C$. Assim, os pontos da circunferência são simétricos, dois a dois, em relação a um diâmetro qualquer.

Conseqüência. ***O diâmetro divide a circunferência e o círculo em partes iguais.*** Realmente, se fizermos rotação do arco AMB em tôrno do eixo de simetria AB, cada ponto dêsse arco coincidirá com seu simétrico em $AM'B$. Logo, os dois arcos AMB e $AM'B$ coincidem e são iguais.

2.ª) **O diâmetro perpendicular a uma corda divide esta corda e os dois arcos por ela subtendidos em duas partes iguais.**

Seja a circunferência O e MN perpendicular a AB (fig. 82).

Temos a tese:

$$AD = DB$$
$$\overparen{MA} = \overparen{MB}$$
$$\overparen{NA} = \overparen{NB}.$$

Demonstração. Em virtude da primeira propriedade, MN é um eixo de simetria, e os pontos A e B são simétricos em relação a êsse eixo. Assim, se fizermos rotação, em tôrno de MN, da semicircunferência MAN, o segmento DA coincidirá com DB, o arco MA com MB e NA com NB, o que demonstra a tese.

Observação. As recíprocas são verdadeiras.

Conseqüência. ***O diâmetro perpendicular a uma corda satisfaz a cinco condições:***

Fig. 82

1.ª) *é perpendicular à corda;*
2.ª) *passa pelo centro;*
3.ª) *passa pelo ponto médio da corda;*
4.ª) e 5.ª) *passa pelos pontos médios de cada um dos arcos subtendidos.*

Como o diâmetro é uma reta, duas dessas condições serão suficientes para determiná-lo; daí, conclui-se: tôda reta que satisfizer a duas dessas condições será um diâmetro e, conseqüentemente, satisfará também às três outras.

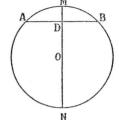
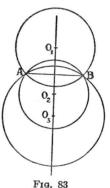



Fig. 83

Observação. ***Por dois pontos dados, A e B*** (fig. 83) ***passa uma infinidade de circunferências.*** Traçando-se a mediatriz do segmento AB, todos os pontos dessa mediatriz serão eqüidistantes de A e B Portanto, tomando-se como centro um ponto qualquer dessa mediatriz e como raio a distância dêsse ponto a um dos extremos de AB, a circunferência traçada nessas condições passará também no outro extremo Assim, dois pontos não determinam a circunferência

3.ª) **Três pontos, não em linha reta, determinam uma circunferência (fig. 84).**

Sejam A, B, C, os três pontos dados não em linha reta. Tracemos as mediatrizes DE e FH, dos segmentos AB e BC.

O ponto O, de intersecção das duas mediatrizes, é eqüidistante de A e B, por pertencer a DE; é também eqüidistante de B e C, por pertencer a FH.

Logo, as distâncias OA, OB e OC são iguais, e a circunferência traçada do ponto O como centro e de raio OA, passará nos três pontos dados. Além disso, essa circunferência é única, pois, para passar pelos três pontos, deve ter o centro ao mesmo

tempo sôbre DE e FH e, por conseguinte, em O, que é o único ponto de intersecção dessas duas retas.

4.ª) **Os arcos compreendidos entre duas retas paralelas são iguais.**

As paralelas podem ser duas secantes, duas tangentes, ou uma secante e uma tangente. Consideremos os três casos.

Primeiro caso. ***As paralelas são secantes.*** Sejam AB e CD. (fig. 85)

Traçando-se o diâmetro MN, perpendicular a uma das cordas, o mesmo será também perpendicular à outra e dividirá os arcos subtendidos em duas partes iguais.

FIG. 84

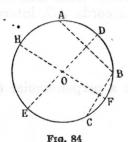
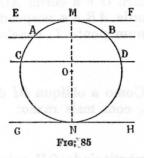



FIG. 85

Logo, temos:
$$\begin{cases} \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MD} \\ \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, resulta:

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

Segundo caso. ***Uma paralela é secante e outra tangente.*** Sejam AB e EF (fig. 85).

O diâmetro MN, traçado do ponto de contacto, é perpendicular à tangente EF e, por conseguinte, à sua paralela AB; logo, divide o arco AB em duas partes iguais, isto é:

$$\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}.$$

Terceiro caso. ***As paralelas são tangentes.*** Sejam EF e GH (fig. 85).

Traçando a corda AB, paralela às tangentes dadas, resulta, em virtude da 2.ª parte:

$$\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$$
$$\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB},$$

adicionando, membro a membro, temos:

$$\overset{\frown}{MAN} = \overset{\frown}{MBN}.$$

60. Propriedades das cordas.

Primeira propriedade. ***No mesmo círculo ou em círculos iguais:***

I. Dois arcos iguais são subtendidos por cordas iguais.

II. O maior de dois arcos desiguais, ambos menores que a semicircunferência, é subtendido por maior corda.

Hip.: 1.º) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$; 2.º) $\overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{CD}$,

Tese: 1.º) $AB = CD$; 2.º) $EF > CD$.

DEMONSTRAÇÃO. *a*) Deslocando (fig. 86) a segunda circunferência sôbre a primeira de modo que o ponto C coincida com A, o ponto D coincidirá com B, por serem iguais os arcos. Assim, as extremidades das cordas AB e CD coincidirão e estas são iguais.

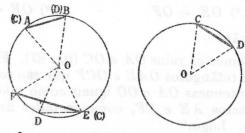



FIG. 86

b) Desloquemos o segundo círculo sôbre o primeiro (fig. 86) de modo que o ponto C coincida com E. Em virtude da segunda hipótese o ponto D ficará no interior do arco EF e, se traçarmos os raios dos três pontos E, D e F, o raio DO ficará no interior do ângulo EOF; logo, podemos concluir:

$$\widehat{EOF} > \widehat{COD}$$

Assim, os triângulos COD e EOF têm dois lados iguais e o ângulo formado desigual, logo, são desiguais e podemos concluir:

$$EF > CD.$$

Recíproca. No mesmo círculo ou em círculos iguais:

> **I. Duas cordas iguais subtendem arcos iguais.**
> **II. Duas cordas desiguais subtendem arcos desiguais menores que a semicircunferência; e a maior corda subtende maior arco.**

A demonstração segue o método geral de exclusão, em virtude do princípio de reciprocidade.

Segunda propriedade. ***No mesmo círculo ou em círculos iguais:***

> **I. Duas cordas iguais são eqüidistantes do centro.**
> **II. De duas cordas desiguais, a maior dista menos do centro.**

Hip.: 1.°) $AB = CD$ (fig. 87) 2.°) $AB > CD$ (fig. 88)
Tese: 1.°) $OE = OF$ 2.°) $OE < OF$.

DEMONSTRAÇÃO:

a) Tracemos os raios OA e OC (fig. 87). Ficam formados os triângulos retângulos OAE e OCF que são congruentes, por terem as hipotenusas OA e OC iguais como raios, e da mesma forma os catetos AE e CF, como metades de cordas iguais por hipótese. Logo:

$$OE = OF.$$

FIG. 87

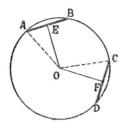
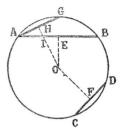



FIG. 88

b) De acôrdo com a primeira propriedade o arco AB é maior que CD; logo, se traçarmos a corda AG, igual a CD (fig. 88), o ponto G ficará no interior do arco AB. Desta forma, o centro O e a corda AG ficam situados dum lado e doutro da corda AB e a perpendicular OH à corda AG, interceptará AB num ponto I, concluindo-se:

$$OH > OI.$$

Como a oblíqua OI é maior que a perpendicular OE, resulta, com mais razão:

$$OH > OE$$

ou, substituindo OH pelo segmento igual OF, em virtude da primeira parte:

$$OF > OE.$$

Recíproca.

> **I. Duas cordas eqüidistantes do centro são iguais.**
> **II. De duas cordas quaisquer, a mais próxima do centro é a maior.**

A demonstração segue o método geral de exclusão.

CONSEQÜÊNCIA. ***O diâmetro é a maior corda do círculo.*** Realmente, a distância do diâmetro ao centro é nula, e, portanto, é a corda mais próxima do centro.

61. Posições relativas de dois círculos. Em primeiro lugar observamos que duas circunferências distintas não podem ter mais de dois pontos comuns, em virtude da terceira propriedade do diâmetro (pág. 145). Resulta, então, que duas circunferências podem ter *dois*, *um* ou *nenhum* ponto comum.

A reta que passa pelos centros de duas circunferências denomina-se *linha dos centros*.

62. Teorema fundamental.

> **Se duas circunferências tiverem um ponto comum fora da linha dos centros, terão necessàriamente um segundo ponto comum, simétrico do primeiro em relação à linha dos centros.**

DEMONSTRAÇÃO. Sejam as circunferências O e O' com o ponto comum A, exterior a OO' (fig. 89), e consideremos o ponto A', simétrico de A em relação a OO'. Concluímos:

$$OA' = OA.$$

Assim, a distância OA' é igual ao raio OA e o ponto A' está situado sôbre a primeira circunferência.

Anàlogamente, concluiremos:

$$O'A' = O'A$$

e o ponto A' está sôbre a segunda circunferência.

Resulta, então, estar o ponto A' situado sôbre as duas circunferências e ser comum.

CONSEQÜÊNCIAS:

Primeira. ***Quando duas circunferências se cortam, a linha dos centros é perpendicular à corda comum.***

Segunda. ***Se duas circunferências têm um único ponto comum, isto é, são tangentes, o ponto de contacto fica situado na linha dos centros.***

Terceira. ***Duas circunferências podem ocupar cinco posições relativas.***

As figuras abaixo esclarecem as posições onde d representa a distância OO' entre os centros:

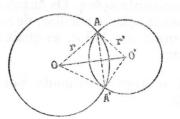



FIG. 89

I — Secantes

$r - r' < d < r + r'$

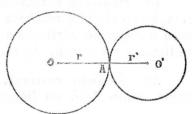



FIG. 90

II — Tangentes exteriores

$d = r + r'$

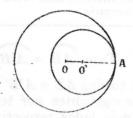



FIG. 91

III — Tangentes interiores

$d = r - r'$

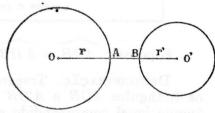



FIG. 92

IV — Exteriores

$d > r + r'$

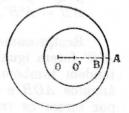



FIG. 93

V — Interiores

$d < r - r'$

Quando os centros coincidem as circunferências dizem-se ***concêntricas***. É um caso particular da 5.ª posição.

X — CORRESPONDÊNCIA DE ARCOS E ÂNGULOS

63. Posições relativas. Denominações. Os ângulos, em relação ao círculo, recebem denominação particular, de acôrdo com posição do vértice e a natureza dos lados, as quais serão indicadas no estudo de cada um.

64. Ângulo central. É o ângulo formado por dois raios, como AOB na figura 94.

65. Propriedades do ângulo central.

1.ª) **Na mesma circunferência ou em circunferências iguais, ângulos centrais iguais interceptam arcos iguais e reciprocamente.**

Hipótese: $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ Tese: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

Demonstração. Traçando as cordas AB e $A'B'$ (fig. 94) os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes por terem um ângulo igual compreendido entre dois lados respectivamente iguais (2.º caso). Resulta, então, a igualdade das cordas AB e $A'B'$ e, conseqüentemente, a dos arcos por elas subtendidos, isto é:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}.$$

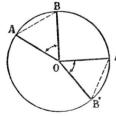



Fig. 94

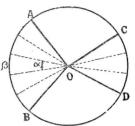
Recìprocamente, se os arcos AB e $A'B'$ forem iguais, as cordas que os subtendem também o serão. Assim, os triângulos AOB e $A'OB'$ serão congruentes por terem os três lados respectivamente iguais; por conseguinte, os ângulos que se correspondem AOB e $A'OB'$ serão iguais.

2.ª) **Na mesma circunferência ou em circunferências iguais, os ângulos centrais são proporcionais aos arcos compreendidos entre seus lados.**

Sejam AOB e COD dois ângulos centrais quaisquer, AB e CD os arcos compreendidos entre seus lados.

Tese: $\dfrac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}$

Fig. 95

Dividamos os ângulos AOB e COD (fig. 95) em partes iguais a um certo ângulo, α, o que é sempre possível, com êrro tão pequeno quanto quisermos, por ser α arbitrário. Suponhamos que $\widehat{AOB}$ contenha m vêzes o ângulo α e $\widehat{COD}$ o contenha p vêzes. Assim, teremos:

$$\widehat{AOB} = m\alpha$$
$$\widehat{COD} = p\alpha$$

A razão entre os ângulos será:

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}} = \frac{m}{p} \qquad (1)$$

Em virtude da construção, os arcos AB e CD ficarão divididos, respectivamente, em m e p arcos iguais, de acôrdo com o teorema anterior. Assim, se representarmos um dêsses arcos por β teremos:

$$\overset{\frown}{AB} = m\beta$$
$$\overset{\frown}{CD} = p\beta$$

A razão entre os arcos será:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{m}{p} \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), concluiremos:

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}.$$

66. Aplicação. Medida do ângulo central.

> **O ângulo central tem a mesma medida do arco compreendido entre seus lados, desde que se adote como unidade de arco o que é interceptado pela unidade de ângulo.**

Seja o ângulo central COD e AOB, a unidade de ângulo que intercepta, por hipótese, a unidade AB de arco (fig. 96).

Em virtude do segundo teorema, teremos:

$$\frac{\widehat{COD}}{\widehat{AOB}} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{AB}}$$

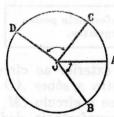
Por definição de medida, os dois membros da última igualdade são, respectivamente, as medidas do ângulo COD e do arco CD, concluindo-se:

$$\text{medida de } \widehat{COD} = \text{medida } \overset{\frown}{CD}.$$

Para indicar que as medidas são iguais, escreveremos:

$$\widehat{COD} = \overset{\frown}{CD};$$

subtende-se que se trata da medida.

Fig. 96

Abreviadamente diz-se: *o ângulo central tem a mesma medida que o arco compreendido entre seus lados.* Subtende-se a correspondência necessária entre as unidades de ângulo e arco, que é desde já estabelecida para as proposições que se seguem.

67. Sistemas de medida de ângulos e arcos. A última propriedade permite estabelecer um sistema de medida dos ângulos e arcos, mediante dois critérios.

1.º) Fixamos a unidade de ângulo e tomamos como unidade de arco o que corresponde ao ângulo central unitário. Resultam dois sistemas legais:

a) o *sexagesimal*, a unidade de ângulo é o grau; a unidade de arco será o que corresponder ao ângulo central de 1º; êsse arco denomina-se também *grau*. As duas unidades têm a mesma denominação.

b) o *decimal*, a unidade de ângulo é o reto ou seu submúltiplo, o *grado*. A unidade de arco é o arco que corresponde ao ângulo central de 1 grado e denomina-se também *grado*.

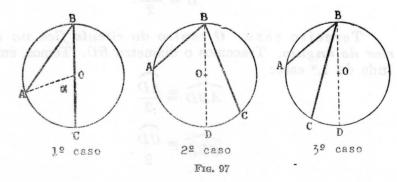
2.º) Fixamos a unidade de arco, e tomamos para unidade o ângulo central que corresponder ao arco unitário. Forma-se, assim, o sistema de medida chamado *circular*.

A unidade é o arco, cujo comprimento é igual ao comprimento do raio do mesmo círculo; a unidade de ângulo é o ângulo central que corresponder a êsse arco e denomina-se *radiano*. O símbolo dessa unidade é *rd*; os múltiplos e submúltiplos decimais não têm designação própria.

68. Ângulo inscrito. É o ângulo que tem o vértice na circunferência e cujos lados são cordas, como ABC na figura 97.

> **O ângulo inscrito tem a mesma medida que a metade do arco compreendido entre seus lados.**

Demonstração. Podemos considerar os três casos indicados na figura 97.

Fig. 97

Primeiro caso. ***Um dos lados do ângulo é um diâmetro.*** Tracemos o raio OA. Fica formado o triângulo isósceles AOB, onde α é ângulo externo; logo, temos:

$$\hat{A} = \hat{B} \quad \text{e} \quad \alpha = \hat{A} + \hat{B}$$

donde $$\alpha = 2\hat{B} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \frac{\alpha}{2}.$$

Como α é central, sua medida será igual à do arco AC. Concluiremos, então, em virtude da última igualdade:

$$\text{med. } \hat{B} = \frac{\text{med. } \overset{\frown}{AC}}{2} \quad \text{ou} \quad \hat{B} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

OBSERVAÇÃO. A última relação lê-se: *o ângulo B tem medida igual a metade do arco AC.*

Segundo caso. ***O centro do círculo fica no interior do ângulo.*** Tracemos o diâmetro BD. Temos, em virtude do 1.º caso:

$$\widehat{ABD} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

$$\widehat{DBC} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}.$$

Adicionando, membro a membro, resulta:

$$\hat{B} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

Terceiro caso. ***O centro do círculo fica no exterior do ângulo.*** Tracemos o diâmetro BD. Temos, em virtude do 1.º caso:

$$\widehat{ABD} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

$$\widehat{CBD} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}.$$

Subtraindo, membro a membro, resulta:

$$\hat{B} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

69. Ângulo inscrito num segmento.

> **Um ângulo diz-se inscrito num segmento circular, quando tem o vértice sôbre o arco do segmento e os lados passam nas extremidades do mesmo arco.**

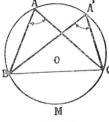
CONSEQÜÊNCIAS.

1.ª) *Os ângulos inscritos no mesmo segmento são iguais.*

Realmente, os ângulos A e A' (fig. 98) têm ambos medida igual à da metade do arco BMC.

FIG. 98

2.ª) *Todo ângulo inscrito num semicírculo é reto.*

Realmente, sua medida será igual à da metade de uma semicircunferência, isto é, 90°.

70. Aplicações. Propriedades das tangentes.

1.ª) **De um ponto exterior a uma circunferência pode-se sempre traçar duas tangentes.**

DEMONSTRAÇÃO. Seja o ponto A, exterior ao círculo O (fig. 99). Liguemos o ponto A ao centro e, sôbre AO como diâmetro, tracemos o círculo (M, OM) que cortará a circunferência dada em T e T'. Finalmente, tracemos AT e AT'. Os ângulos T e T' são retos, por estarem inscritos, respectivamente, nos semicírculos OTA e $OT'A$; logo, AT e AT' são tangentes ao círculo O, como perpendiculares aos raios OT e OT'.

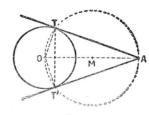



FIG.

2.ª) **Os segmentos das tangentes traçadas do mesmo ponto, e compreendidos entre êste ponto e os de contacto, são iguais.**

Sejam AT e AT' os segmentos das duas tangentes traçadas de A (fig. 99).

Tese: $AT = AT'$.

Demonstração. Os triângulos retângulos OTA e $OT'A$ são congruentes por terem a hipotenusa AO comum e os catetos OT e OT' iguais como raios. Logo, temos:

$$AT = AT'.$$

Observação. As duas tangentes AT e AT' são oblíquas à corda TT e, como de um ponto exterior a uma reta só se podem traçar duas oblíquas iguais a um comprimento dado, conclui-se que ***de um ponto exterior só se podem traçar duas tangentes.***

71. Ângulo de segmento. É o ângulo formado por uma corda e uma tangente traçadas do mesmo ponto, como BAC na figura 100.

O ângulo de segmento tem a mesma medida que a metade do arco compreendido entre seus lados.

Tese: $\hat{A} \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ (fig. 100).

Demonstração. Tracemos o diâmetro AD. O ângulo CAD é reto, logo, tem medida igual à da metade do arco AD; como BAD é inscrito, concluímos as relações:

$$\widehat{CAD} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

$$\widehat{BAD} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}.$$

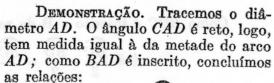
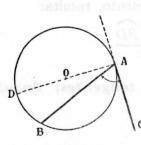



Fig. 100

Subtraindo, membro a membro, resulta:

$$\hat{A} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}.$$

72. Ângulo ex-inscrito. É o ângulo que tem o vértice na circunferência e cujos lados são uma corda e o prolongamento de outra, como BAD na figura 101.

O ângulo ex-inscrito tem a mesma medida que a semi-soma dos arcos compreendidos entre seus lados e os prolongamentos dêstes.

Tese: $\widehat{DAB} \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}}{2}$.

Demonstração. Tracemos a corda BC (fig. 101). O ângulo DAB é externo no triângulo ABC; logo, temos:

$$\widehat{DAB} = \hat{B} + \hat{C}.$$

Como $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são inscritos, resulta, substituindo-os pelos arcos de mesma medida:

$$\widehat{DAB} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

donde, finalmente:

$$\widehat{DAB} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}}{2}.$$

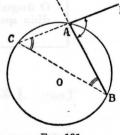



Fig. 101

73. Ângulo excêntrico interno. Tem o vértice no interior do círculo e os lados são segmentos de cordas, como AMB na figura 102.

O ângulo excêntrico interno tem a mesma medida que a semi-soma dos arcos compreendidos entre os lados e seus prolongamentos.

Tese: $M \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$ (fig. 102).

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos a corda BD. O ângulo M é externo no triângulo BMD (fig. 102), logo:

$$M = \hat{B} + \hat{D}.$$

Fig. 102

Como B e D são inscritos, conclui-se:

$$M \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

donde, finalmente: $M \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$.

74. Ângulo excêntrico externo. Ângulo circunscrito. É o que tem o vértice no exterior e cujos lados são secantes ou tangentes, BAC na figura 103.

O ângulo de vértice exterior tem a mesma medida que a semidiferença dos arcos compreendidos entre seus lados.

Tese: $\hat{A} \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$. (fig. 103).

DEMONSTRAÇÃO. Podemos considerar os três casos indicados na fig. 103.

Primeiro caso. ***Os lados são secantes.*** Tracemos a corda BE. O ângulo BEC é externo no triângulo AEB; logo, temos:

$$\widehat{BEC} = \hat{A} + \hat{B}$$

donde: $\hat{A} = \widehat{BEC} - \hat{B}$.

Como $\widehat{BEC}$ e $\hat{B}$ são inscritos, temos:

$$A \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}.$$

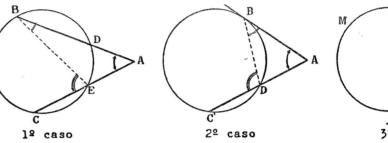
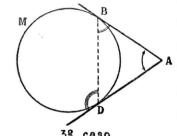



Fig. 103

Segundo caso. ***Um lado é secante e outro é tangente.***

Tese: $\hat{A} \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BD}}{2}$.

Traçando a corda BD, temos da mesma forma:

$$\widehat{BDC} = \hat{A} + \hat{B}$$

donde: $\hat{A} = \widehat{BDC} - \hat{B}$.

Como BDC é inscrito e $\hat{B}$ de segmento, resulta:

$$\hat{A} \overset{m}{=} \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BD}}{2}.$$

Terceiro caso. ***Os lados são tangentes; ângulo circunscrito.***

Tese: $\hat{A} \overset{m}{=} \dfrac{\overset{\frown}{BMD} - \overset{\frown}{BD}}{2}$.

Tracemos a corda BD. Temos anàlogamente ao caso anterior:

$$\widehat{BDC} = \hat{A} + \hat{B}$$

donde:

$$\hat{A} = \widehat{BDC} - \hat{B}.$$

Como BDC e B são ângulos de segmento, resulta:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BMD}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2}$$

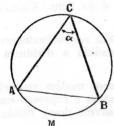
donde, finalmente: $$\hat{A} = \frac{\widehat{BMD} - \widehat{BD}}{2}.$$

75. Segmento capaz de um ângulo dado. Assim se designa o segmento circular, onde se pode inscrever um ângulo igual ao dado.

FIG. 104

O segmento circular ACB (fig. 104) é capaz do ângulo, cuja medida é α.

O ângulo α é inscrito; logo, terá a mesma medida que a metade do arco AMB; assim temos:

$$\alpha = \frac{360^\circ - \widehat{ACB}}{2}$$

donde: $$ACB = 360^\circ - 2\alpha,$$

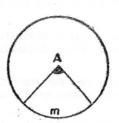
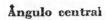
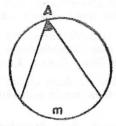
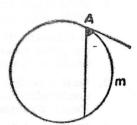
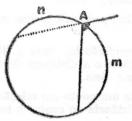
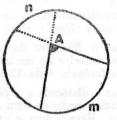
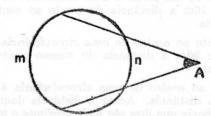
equação que permite calcular a medida do arco do segmento capaz de um ângulo dado. Exemplo:

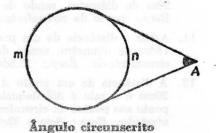
A medida x do arco do segmento capaz de um ângulo de 30° será:

$$x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ.$$

76. Resumo:

CORRESPONDÊNCIA ENTRE ÂNGULOS E ARCOS

Ângulo central — $\hat{A} = m$

Ângulo inscrito — $\hat{A} = \frac{m}{2}$

Ângulo de segmento — $\hat{A} = \frac{m}{2}$

Ângulo ex-inscrito — $\hat{A} = \frac{m + n}{2}$

Ângulo excêntrico interno — $\hat{A} = \frac{m + n}{2}$

Ângulo excêntrico externo — $\hat{A} = \frac{m - n}{2}$

Ângulo circunscrito — $\hat{A} = \frac{m - n}{2}$

EXERCÍCIOS

1. Pode existir uma circunferência de raio igual a 2cm e em que uma corda meça 7cm? Por que? *Resp.:* não.

2. O diâmetro de uma circunferência tem 9cm. Achar a distância de um ponto exterior a essa circunferência, sabendo que a distância do ponto ao centro é de 7cm. *Resp.:* 2,5cm.

3. Qual a posição relativa de duas circunferências de raios respectivamente iguais a 4cm e 6cm, sendo a distância dos centros igual a 8cm? *Resp.:* secantes.

4. Qual a posição relativa de duas circunferências de raios iguais a 7cm. e 13cm, se a distância dos centros é de 6cm? *Resp.:* tangentes interiores.

5. Duas circunferências exteriores têm os raios iguais a 5cm e 9cm. Qual a menor distância, expressa em cm por um número inteiro, a que podem estar os centros? *Resp.:* 15cm.

6. Numa circunferência de raio 16dm, pode existir uma corda de 315cm? Por que? *Resp.:* sim.

7. Achar o diâmetro de uma circunferência, onde a distância de um ponto exterior ao centro é de 15cm e a distância do mesmo ponto à circunferência é de 12cm. *Resp.:* 6cm.

8. Achar a distância e a posição de um ponto em relação a uma circunferência, sendo de 8cm a sua distância ao centro e tendo o diâmetro 14cm. *Resp.:* 1cm e exterior.

9. Achar a distância e a posição de um ponto em relação a uma circunferência de 18dm de diâmetro, sabendo que o mesmo ponto dista do centro 6dm. *Resp.:* 3dm e interior.

10. Achar a distância e a posição de um ponto a uma circunferência de 20m de diâmetro, sendo de 10m a distância do ponto ao centro. *Resp.:* ponto da circunferência.

11. Achar a distância de um ponto ao centro de uma circunferência de 15dm de diâmetro, sendo de 9dm a distância do mesmo ponto à circunferência. *Resp.:* 16,5dm.

12. A distância de um ponto A ao centro de uma circunferência é de 20cm e o raio é 3/5 daquela distância. Achar a distância daquele ponto aos pontos da circunferência que lhes são mais próximos e mais afastado. *Resp.:* 8cm e 32cm.

13. A distância de um ponto exterior ao ponto da circunferência que lhe é mais afastado mede 20cm. Se o raio tiver 7,5cm, qual será a distância daquele ponto à circunferência? *Resp.:* 5cm.

14. Achar a posição relativa de duas circunferências de raios iguais R = 10cm e r = 5cm, sendo a distância dos centros d = 9cm. *Resp.:* secantes.

15. Mesmo problema, sendo: R = 3cm e r = 4cm e d = 11cm. *Resp.:* exteriores.

16. Mesma questão, sendo: R = 7cm, r = 2cm e d = 5cm. *Resp.:* tangentes interiores.

17. Mesma questão, sendo: R = 5,5dm, r = 4,3dm e d = 9,8dm. *Resp.:* tangentes exteriores.

18. Mesma questão, sendo: R = 6cm, r = 2cm e d = 0. *Resp.:* concêntricas.

19. Mesma questão, sendo: R = 13cm, r = 4cm e d = 7cm. *Resp.:* interiores.

20. Duas circunferências são tangentes exteriores. O diâmetro da primeira mede 8cm e a distância dos centros é de 9cm. Calcular o diâmetro da segunda circunferência. *Resp.:* 10cm.

21. Duas circunferências são tangentes interiores. O diâmetro da primeira mede 12dm e a distância dos centros é de 2dm. Calcular o diâmetro da segunda. *Resp.:* 8dm.

22. Duas circunferências secantes têm 16cm e 18cm respectivamente, de diâmetros. Entre que valores está compreendida a distância dos centros? *Resp.:* 1cm e 17cm.

23. Os diâmetros de duas circunferências interiores medem respectivamente, 14cm e 30cm. Se a distância dos centros é expressa em cm por números inteiros, quais as medidas possíveis dessa distância? *Resp.:* 0 a 7cm.

24. Qual é a menor medida, expressa em número inteiro de metros, da distância dos centros de duas circunferências exteriores, cujos diâmetros medem respectivamente, 16cm e 10m? *Resp.:* 14cm.

25. Duas cordas de um círculo subtendem arcos de 90° e 60°, respectivamente. Qual das duas é mais próxima do centro? Por que?

26. Duas circunferências são concêntricas. Traça-se a corda da maior que é também tangente à menor. Provar que o ponto de tangência divide ao meio a corda traçada.

27. Quantas tangentes comuns podem ser traçadas a duas circunferências secantes? *Resp.:* duas.

28. Quantas tangentes comuns têm duas circunferências exteriores? *Resp.:* quatro.

29. Quantas tangentes comuns podem ser traçadas a duas circunferências tangentes exteriores? *Resp.:* três.

30. Das extremidades de um diâmetro AB traçam-se as cordas paralelas AC e BD. Provar que as cordas são iguais.

31. Qual a posição relativa de duas circunferências que têm duas tangentes comuns internas e duas tangentes comuns externas?

32. A reta determinada pelo centro de uma circunferência e o ponto de intersecção de duas tangentes é mediatriz da corda dos pontos de contacto. Provar.

33. Qual a posição relativa de dois círculos que não têm tangentes comuns?

34. Se dois círculos forem tangentes exteriores, as tangentes traçadas a cada um dêles de um ponto qualquer da tangente comum interna são iguais. Provar.

35. Se os lados de um $\triangle$ retângulo forem tangentes ao círculo, o diâmetro será igual à diferença entre a hipotenusa e a soma dos catètos. Provar.

36. Traçam-se duas secantes comuns pelo ponto de contacto de duas circunferências tangentes exteriores. Provar que as cordas traçadas das extremidades dessas secantes em cada uma das circunferências são paralelas.

37. Se os lados de um $\triangle$ equilátero forem tangentes ao círculo, o raio será igual a um têrço da altura. Provar.

38. As tangentes traçadas das extremidades de um mesmo diâmetro são paralelas. Provar.

39. Por um ponto P, exterior a uma circunferência O traça-se uma secante PAB, cuja parte externa PA é igual ao raio. Traça-se, em seguida a secante POC, passando pelo centro O. Provar que o ângulo BOC é o triplo do ângulo POA.

40. Um ponto P é exterior a uma circunferência O. Achar, sôbre a circunferência dois pontos eqüidistantes de P.
Resp.: Extremidades de uma corda qualquer perpendicular a PO.

41. O arco AB é a metade do arco DC. Traçam-se as secantes DA e CB, que se encontram num ponto exterior, formando um ângulo de 34°. Calcular os arcos AB e CD. *Resp.:* 136° e 68°.

42. Duas secantes formam um ângulo de 38°. O menor dos arcos interceptados pelas secantes tem 68°. Calcular o maior arco interceptado pelas mesmas secantes. *Resp.:* 144°.

43. Os ângulos A, B e C de um triângulo inscrito em um círculo têm, respectivamente, 75°, 67° e 38°. O prolongamento do lado BC intercepta a tangente traçada do ponto A num ponto D. Calcular os ângulos do triângulo ABD. *Resp.:* 38°, 113° e 29°.

44. Num círculo, traçam-se duas cordas perpendiculares AB e CD. O arco AC tem 45° e BC tem 103°. Achar as medidas dos ângulos ABD e BAD. *Resp.:* 38°30′ e 67°30′.

45. Calcular a medida de um ângulo inscrito, cujos lados subtendem arcos de 79° e 88°30′. *Resp.:* 96°15′.

46. Duas cordas AB e CD cortam-se, formando um ângulo de 58°. As secantes AD e BC se encontram num ponto E, e formam um ângulo de 28°. Calcular as medidas dos arcos AC e BD. *Resp.:* 86° e 30°.

47. As bases de um trapézio inscrito num semicírculo, subtendem arcos que valem, respectivamente, 1/8 e 1/3 da circunferência. Calcular os ângulos internos do trapézio. *Resp.:* 41° 15′ e 138°45′.

48. De um ponto A, exterior a uma circunferência, traça-se uma secante ABC, cujo segmento exterior AB é igual ao raio. Do mesmo ponto A traça-se a secante AOD, passando pelo centro O. O ângulo exterior A tem por medida 30°. Calcular as medidas dos dois arcos compreendidos entre os lados do ângulo A. *Resp.:* 90° e 30°.

49. Duas tangentes traçadas do mesmo ponto exterior, formam um ângulo de 34°28′. Calcular os dois arcos replementares compreendidos entre os lados do ângulo. *Resp.:* 145°32′ e 214°28′.

50. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo. Os ângulos A e B têm, respectivamente, 38°26′ e 108°16′. Calcular os ângulos C e D. *Resp.:* 141°34′ e 71°44′.

51. As bases de um trapézio inscrito num círculo subtendem arcos que valem respectivamente, 1/6 e 1/10 da circun erência. Calcular os ângulos internos do trapézio.
Resp.: 1.ª sol.: 24° e 156°; 2.ª sol.: 84° e 96°.

52. Um círculo está inscrito num triângulo, cujos lados têm, respectivamente, 5cm, 8cm e 9cm. Calcular as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contacto. *Resp.:* 2cm, 3cm e 6cm.

53. Os raios de duas circunferências têm, respectivamente, 4m e 6m. A distância dos centros é de 13m. Qual a posição relativa das duas circunferências? *Resp.:* exteriores.

54. Os raios de dois círculos têm, respectivamente, 5m e 3m. A distância dos centros tem 6m. Qual a posição relativa das duas circunferências?
Resp.: secantes.

55. Duas circunferências são tangentes exteriores e a distância dos centros é de 13m. O raio da maior tem 8m. Qual o raio da menor?
Resp.: 5m.

56. Duas circunferências são tangentes interiores e a distância dos centros é de 2m. O raio da maior tem 5m. Qual o raio da menor?
Resp.: 3m.

57. Os raios de dois círculos têm, respectivamente, 3m e 5m. A distância dos centros é de 1m. Qual a posição relativa das duas circunferências?
Resp.: interiores.

58. Qual a distância dum ponto a uma circunferência de 18mm de diâmetro, se o ponto dista 15mm do centro? *Resp.:* 6mm.

59. Qual é a medida do diâmetro de uma circunferência, sendo a distância de um ponto exterior à circunferência de 12cm e a distância do mesmo ponto ao centro de 15cm? *Resp.:* 6cm.

60. A distância de um ponto P ao centro de uma circunferência é de 2dm e o raio é 2/5 daquela distância. Qual a distância do ponto à circunferência? *Resp.:* 12cm.

61. Qual é a distância de um ponto ao centro de uma circunferência de 10dm de diâmetro, se êsse ponto dista da circunferência 3dm? *Resp.:* 8dm.

62. Qual a posição relativa de duas circunferências, cujos raios medem, respectivamente, 6cm e 9cm, sendo a distância dos centros de 3cm? *Resp.:* tangentes interiores.

Provar os teoremas:

63. AB e CD são duas cordas paralelas de um círculo. Provar que as cordas AC e BD são eqüidistantes do centro.

64. Traça-se uma secante a duas circunferências concêntricas. Provar que os segmentos da secante compreendidos entre as circunferências são iguais.

65. A, B e C são três pontos de uma circunferência. A bissetriz do ângulo ABC intercepta a circunferência em D. Do ponto D traça-se a corda paralela a AB, que intercepta a circunferência em E. Provar que DE é igual a BC.

66. AB e CD são duas cordas paralelas de um círculo, cujo diâmetro é BC. Traçam-se as cordas AE e DF, perpendiculares ao diâmetro BC. Provar que AE e DF são iguais.

67. Duas circunferências são tangentes no ponto A. Traça-se a tangente comum externa BC. Provar que o triângulo BAC é retângulo.

68. Das extremidades de um diâmetro AB traçam-se as cordas paralelas AC e BD. Provar que as cordas DE e CH, traçadas perpendicularmente ao diâmetro AB, são iguais.

69. Duas circunferências são tangentes externas em A. Traça-se uma secante comum que corta as circunferências em B, A e C. Provar que as tangentes em B e C são paralelas.

70. Da extremidade de um diâmetro AB traça-se a tangente BX. De um ponto D dessa tangente traça-se uma segunda tangente DE. Traça-se AE até encontrar BX no ponto C. Provar que BD e DC são iguais.

UNIDADE III

Linhas proporcionais. Semelhança

I — PONTOS QUE DIVIDEM UM SEGMENTO NUMA RAZÃO DADA

1. Definições. Quatro segmentos dados são proporcionais quando os números que exprimem suas medidas formam proporção.

De um modo geral duas sucessões de segmentos são proporcionais quando a razão entre um segmento qualquer da primeira e seu correspondente (denominado *homólogo*) na segunda é constante.

Aos segmentos aplicam-se as noções conhecidas sôbre grandezas proporcionais (Unidade I).

2. Pontos que dividem um segmento numa razão dada.

1.º) **Sôbre um segmento AB existe sempre um ponto e sòmente um, cuja razão das distâncias aos extremos A e B, nesta ordem, é igual a uma razão dada.**

Hipótese: Seja $X'X$ o suporte do segmento AB e 5/3 a razão dada (fig. 106).

Tese: Existe um ponto interior M e apenas um para o qual se tem:

X' A M B X

$$\frac{MA}{MB} = \frac{5}{3} \quad (1)$$

Fig. 106

DEMONSTRAÇÃO.

1.º) ***O ponto M existe.*** Realmente, se dividirmos o segmento AB em $5 + 3$ ou 8 partes iguais e tomarmos cinco dessas partes a partir de A para a direita, teremos:

$$MA = 5 \quad \text{e} \quad MB = 3; \text{ logo: } \frac{MA}{MB} = \frac{5}{3}.$$

Como o raciocínio pode ser repetido para qualquer razão $\frac{m}{p}$ dada, conclui-se que o ponto M sempre existe.

2.º) ***O ponto M é único.*** Suponhamos que existisse um segundo ponto M', verificando também a condição (1). Teríamos, então:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$$

Alternando os meios e aplicando a propriedade das proporções:

$$\frac{MA}{M'A} = \frac{MB}{M'B} = \frac{MA + MB}{M'A + M'B} = \frac{AB}{AB} = 1$$

donde:

$$MA = M'A$$

e, portanto, o ponto M' confundir-se-ia com o ponto M, o que prova ser único o ponto considerado.

OBSERVAÇÃO. Diz-se que o ponto M interior divide o segmento AB em dois *segmentos aditivos* porque a soma dêstes é igual a AB.

2.º)	**Sôbre o suporte de um segmento *AB* existe sempre um ponto exterior ao mesmo segmento e sòmente um, cuja razão das distâncias aos extremos *A* e *B* é igual a uma razão dada.**

Hipótese: Seja $X'X$ o suporte do segmento AB e 5/3 a razão dada (fig. 107).

Tese: Existe o ponto exterior M e apenas M para o qual se tem:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{5}{3} \qquad (1)$$

DEMONSTRAÇÃO.

1.º) ***O ponto M existe.*** Realmente, se dividirmos o segmento AB em $5 - 3$ ou 2 partes iguais e tomarmos cinco dessas partes de A para a direita, teremos:

$$MA = 5 \text{ e } MB = 3, \text{ donde } \frac{MA}{MB} = \frac{5}{3}.$$

X' A B M X

FIG. 107

2.º) ***O ponto M é único.*** Suponhamos que existisse um segundo ponto P' satisfazendo a condição (1). Teríamos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{P'A}{P'B}$$

Alternando os *meios* e aplicando a propriedade das proporções:

$$\frac{MA}{P'A} = \frac{MB}{P'B} = \frac{MA - MB}{P'A - P'B} = \frac{AB}{AB} = 1,$$

e, conseqüentemente: $MA = P'A$.

O ponto P' confundir-se-ia, pois, com o ponto M, concluindo-se ser único o ponto considerado.

OBSERVAÇÕES.

1.ª) Diz-se que o ponto exterior M divide o segmento AB em dois *segmentos subtrativos*, porque a diferença entre êstes é igual a AB.

2.ª) Os dois teoremas podem ser resumidos no enunciado único seguinte:

> **Sôbre o suporte de um segmento *AB* existem dois pontos e apenas dois, um interno e outro externo, cuja razão das distâncias aos extremos *A* e *B* é igual a uma razão dada.**

CONSEQÜÊNCIAS.

1.ª) Se a razão *fôr maior que* 1, o ponto interior estará sôbre OB e o exterior sôbre BX, isto é, *ambos à direita* do ponto médio O.

2.ª) Se a razão *fôr menor que* 1, o ponto interior estará sôbre AO e o exterior sôbre AX', isto é, *ambos à esquerda* do ponto médio O.

3.ª) Se a razão *fôr igual a* 1, o ponto interior coincide com O e o ponto exterior fica rejeitado para o infinito; logo existe um único ponto para a razão igual a 1, o que é o mesmo que dizer que um segmento tem *um único ponto médio*.

3. Divisão harmônica. Seja o segmento AB da figura abaixo, e M e N dois pontos, o primeiro interno e o segundo

A M B N

FIG. 108

externo, cuja razão das distâncias aos extremos do segmento AB é, como mostra a figura 108 igual a 3/2 para ambos, estando assinalada na figura a unidade de comprimento.

Assim, temos:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2},$$

donde concluímos: $$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

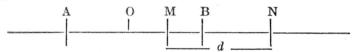
Os dois pontos M e N, que dividem o segmento AB interna e externamente, de tal forma que a razão dos segmentos aditivos é igual à dos subtrativos, diz-se que dividem o segmento AB *harmônicamente*. A *razão* comum denomina-se *razão da divisão harmônica*.

Os dois pontos M e N, de um mesmo par, denominam-se *conjugados harmônicos*.

Os quatro pontos A, B, M e N, formam uma *divisão harmônica*.

4. Propriedade da divisão harmônica.

> **A metade de um segmento é média proporcional entre as distâncias de seu ponto médio a dois conjugados harmônicos.**

DEMONSTRAÇÃO. Seja o segmento AB da figura abaixo, O seu ponto médio e M e N, dois pontos conjugados harmônicos.

Por definição, temos:

$$\therefore \quad \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \qquad (1)$$

Observando a figura, conclui-se, tendo em vista a igualdade de OA e OB:

$$\begin{aligned} MA &= OM + OA \\ MB &= OB - OM = OA - OM \\ NA &= NO + OA \\ NB &= NO - OB = NO - OA. \end{aligned}$$

Substituindo êstes valores em (1):

$$\frac{OM + OA}{OA - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OA}.$$

Aplicando a propriedade das proporções: a *soma dos dois primeiros têrmos está para sua diferença, assim como a soma dos dois últimos está para sua diferença*, conclui-se:

$$\frac{2OA}{2OM} = \frac{2ON}{2OA} \quad \text{ou} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{ON}{OA},$$

donde, finalmente:

$$\boxed{OA^2 = OM \times ON}$$

II — SEGMENTOS DETERMINADOS SÔBRE TRANSVERSAIS POR UM FEIXE DE PARALELAS

5. Primeiro teorema.

Se um feixe de paralelas divide uma transversal em partes iguais, dividirá também qualquer outra transversal em partes iguais.

Sejam as paralelas S_1, S_2, S_3, S_4 (fig. 110):

Hipótese: $AB = BC = CD$ Tese: $a = b = c$.

Demonstração. Tracemos, pelos pontos A, B e C, paralelas à segunda transversal MN.

Em virtude da teoria das paralelas, teremos:

$$a = AE, \quad b = BF, \quad c = CG.$$

Basta, pois, provar a igualdade dos segmentos AE, BF e CG. A igualdade dêstes segmentos resulta imediatamente da congruência dos triângulos ABE, BCF, CDG, que têm um lado igual por hipótese, adjacente a ângulos respectivamente iguais como correspondentes.

Observemos que o raciocínio é o mesmo para as duas figuras.

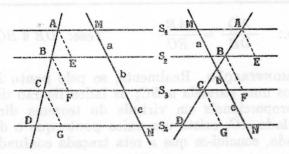



Fig. 110

6. Segundo teorema.

Um feixe de retas paralelas divide duas transversais quaisquer em segmentos correspondentes proporcionais.

1.º) Consideremos primeiramente três paralelas S_1, S_2 e S_3 e as duas transversais AB e CD (fig. 111).

Teremos a tese: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$.

Demonstração. Dividamos os segmentos a e b em partes iguais a um segmento α, o que é sempre possível com êrro tão pequeno quanto quisermos por ser α arbitrário, e admitamos que fique contido 3 vêzes em a e 5 vêzes em b, como mostra a figura. Temos, então:

$$a = 3\alpha$$

$$b = 5\alpha \;\therefore\; \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \qquad (1)$$

Se traçarmos, pelos pontos de divisão de a e b, paralelas às retas do feixe, a segunda transversal CD ficará, também, dividida em partes iguais. Sendo β uma das partes, virá:

$$a' = 3\beta$$

$$b' = 5\beta \;\therefore\; \frac{a'}{b'} = \frac{3}{5} \qquad (2)$$

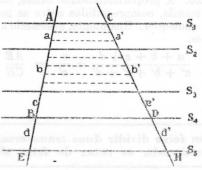



Fig. 111

Se compararmos as igualdades (1) e (2), concluiremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ ou } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

2.°) Consideremos qualquer número de paralelas S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, etc. Teremos a tese:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots$$

DEMONSTRAÇÃO. Em virtude da primeira parte, a propriedade é verdadeira para três paralelas. Assim, considerando S_1, S_2 e S_3, concluiremos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

$\therefore$

considerando S_2, S_3, S_4: $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$,

considerando S_3, S_4, S_5: $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$.

Como tôdas as igualdades têm uma razão comum, podemos, finalmente, concluir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots$$

OBSERVAÇÃO. A proporcionalidade existe, ainda, entre os segmentos totais das transversais, compreendidos entre as paralelas extremas, e dois correspondentes quaisquer. Realmente, aplicando a propriedade das razões iguais, obteremos:

$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \frac{a}{a'} \text{ ou } \frac{AE}{CH} = \frac{a}{a'},$$

Recíproca.

Se um feixe dividir duas transversais em partes proporcionais, as retas do feixe são paralelas.

III — LINHAS PROPORCIONAIS NO TRIÂNGULO

7. Primeiro teorema.

A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em partes proporcionais.

Seja o triângulo ABC e DE a paralela (fig. 112). Temos:

Hip.: $DE \parallel BC$

Tese: $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

x A y D E B C

FIG. 112

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos pelo vértice A a reta xy, paralela a BC.

As três paralelas xy, DE e BC permitem concluir, em virtude da propriedade do feixe de paralelas:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

8. Recíproca.

A reta que divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais é paralela ao terceiro lado.

Hip.: $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ Tese: $DE \parallel BC$

DEMONSTRAÇÃO. Realmente, se pelo ponto D (fig. 112) traçarmos uma paralela a BC, os lados ficarão divididos em partes proporcionais em virtude do teorema direto Como, sôbre o lado AC, existe um único ponto que o divide numa razão dada, conclui-se que a reta traçada confundir-se-á com DE.

OBSERVAÇÕES.

1.ª) A divisão considerada pode ser interior ou exterior.

2.ª) A proporção pode ser formada com os lados inteiros e duas partes correspondentes quaisquer, pois, se aplicarmos à última proporção a propriedade da soma dos dois primeiros e dois últimos têrmos, resulta

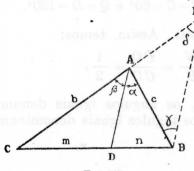
$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \text{ ou } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

9. Segundo teorema.

A bissetriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos aditivos proporcionais aos dois outros lados.

Seja o triângulo ABC e AD a bissetriz interna (fig. 113). Temos:

Hip.: $\alpha = \beta$ Tese: $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$

FIG. 113

DEMONSTRAÇÃO. Prolonguemos CA e tracemos, pelo vértice B, uma paralela BE à bissetriz. Fica formado o triângulo BCE, onde AD é paralela ao lado BE; logo, podemos concluir a proporção:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{AE} \quad (1)$$

em virtude do 1.º teorema.

Por outro lado, temos:

$\alpha = \gamma$ (alternos internos)
$\beta = \delta$ (correspondentes)

Como $\alpha = \beta$ (hipótese)

resulta: $\gamma = \delta;$

O triângulo ABE é, por conseguinte, isósceles, e o lado AE é igual a c. Substituindo, na igualdade (1):

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

10. Terceiro teorema.

A bissetriz do ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto, exteriormente, em dois segmentos subtrativos, proporcionais aos dois outros lados do triângulo.

Seja o triângulo ABC e AD a bissetriz externa (fig. 114). Temos:

Hip.: $\alpha = \beta$ Tese: $\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{c}$.

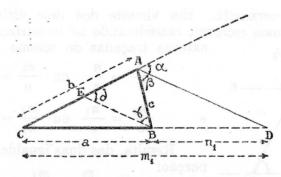



FIG. 114

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos pelo vértice B, a paralela BE à bissetriz. Considerando o triângulo ACD, podemos concluir a proporção:

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{AE} \quad (1)$$

em virtude do 1.º teorema.

Por outro lado, temos:

$\alpha = \delta$ (correspondentes)

$\beta = \gamma$ (alternos internos)

Como $\alpha = \beta$ (hipótese)

resulta: $\gamma = \delta$

O triângulo ABE é, pois, isósceles e, portanto:

$$AE = c.$$

Substituindo, na igualdade (1), AE por seu igual, resulta:

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{c}.$$

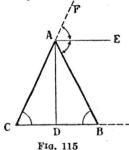
11. Quarto teorema.

As bissetrizes interna e externa, traçadas do mesmo vértice de um triângulo, dividem o lado oposto harmônicamente.

DEMONSTRAÇÃO. Em virtude dos dois últimos teoremas, podemos escrever, considerando as bissetrizes interna e externa traçadas do mesmo vértice A:

FIG. 115

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{c}$$

e

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{b}{c}.$$

Resulta, das duas igualdades, a proporção:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}.$$

OBSERVAÇÃO. Consideremos o triângulo isósceles ABC (fig. 115) e tracemos a bissetriz externa AE. O ângulo externo FAB é igual à soma dos internos B e C; como êstes são iguais por hipótese, resulta:

$$\widehat{FAB} = 2\hat{B}$$

logo, obteremos, tomando as metades:

$$\widehat{EAB} = \hat{B}.$$

Assim, a bissetriz externa AE é paralela ao lado BC e não intercepta o prolongamento do mesmo lado.

IV — SEMELHANÇA

12. Polígonos semelhantes. Consideremos o paralelogramo $ABCD$, cujos lados têm, respectivamente, 2 e 3 centímetros e os ângulos, 60° e 120°.

Tracemos o ângulo XMY de 60° (fig. 117), e, a partir do vértice M, tomemos os segmentos MQ e MN, respectivamente iguais às metades dos lados do paralelogramo $ABCD$; finalmente, completemos o paralelogramo $MNPQ$. Obtemos, então, um quadrilátero que tem a mesma forma e as mesmas propriedades do primeiro e que difere dêle apenas por suas dimensões.

Os dois polígonos são denominados *semelhantes*.

Para indicar a semelhança usa-se o símbolo: $\sim$.

Os polígonos semelhantes são caracterizados por satisfazerem a dois grupos de condições:

1.ª) *Os ângulos são respectivamente iguais.* Na figura 117, temos:

$$M = A = 60°, \; N = B = 120°, \; P = C = 60° \text{ e } Q = D = 120°.$$

2.ª) *Os lados são proporcionais.* Assim, temos:

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{NP}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{PQ}{CD} = \frac{1}{2}.$$

Nos polígonos semelhantes, os ângulos iguais denominam-se *homólogos*, os vértices dos ângulos iguais denominam-

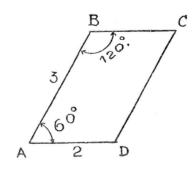
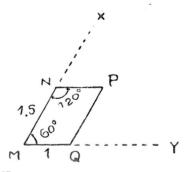



FIG. 117

se *vértices homólogos* e os lados que unem dois vértices homólogos denominam-se *lados homólogos*. Da mesma forma duas diagonais homólogas são as que unem vértices homólogos. Daí a definição:

Dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

13. Razão de semelhança. Como vimos, os lados homólogos dos polígonos semelhantes são proporcionais, isto é, a razão entre dois lados homólogos é constante.

Esta razão constante é denominada ***razão de semelhança.***

14. Triângulos semelhantes. Lei de Tales.

A paralela traçada a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro.

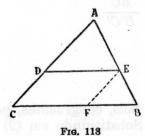



Fig. 118

Seja o triângulo ABC e DE uma paralela a BC (fig. 118).

Tese: $\Delta ABC \sim \Delta ADE.$

DEMONSTRAÇÃO. Devemos provar que os dois triângulos satisfazem às duas condições da definição.

1.°) ***Os ângulos são respectivamente iguais.*** Realmente, o ângulo A é comum aos dois triângulos; C e D são iguais como correspondentes e da mesma forma B e E.

2.°) ***Os lados homólogos são proporcionais.*** Como DE é paralela a BC, temos:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \qquad (1)$$

Traçando EF paralela a AC, concluiremos, em virtude do mesmo princípio:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC},$$

ou, substituindo CF por seu igual DE, como lados opostos do paralelogramo $CDEF$:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), concluímos:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}.$$

OBSERVAÇÃO. **O *teorema de Tales* demonstra a existência dos triângulos semelhantes e é de grande aplicação.**

15. Casos de semelhança de triângulos. O estudo dos casos de semelhança tem por fim verificar a semelhança de dois triângulos, com o menor número possível de dados que podem ser reduzidos a dois.

Primeiro caso:

Dois triângulos que têm dois ângulos respectivamente iguais são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 119).

Hip.: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ B = B' \end{cases}$ Tese: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

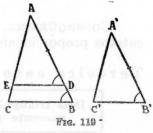
DEMONSTRAÇÃO. Tomemos

$$AD = A'B' \qquad (1)$$

e tracemos DE paralela a BC.

De acôrdo com a lei de Tales.

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \qquad (2)$$

Fig. 119

Os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$ são iguais como correspondentes; B e B' são iguais por hipótese; logo,

$$\hat{D} = B = \hat{B}'.$$

Logo, temos (1.º caso de congruência)

$$\triangle ADE = \triangle A'B'C'$$

Substituindo, na relação (2), ADE por seu igual:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

Conseqüência. Dois triângulos retângulos que têm um ângulo agudo igual são semelhantes.

Segundo caso:

Dois triângulos que têm um ângulo igual formado por lados proporcionais são semelhantes.

Hip.: $\begin{cases} A = A' \\ \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} \end{cases}$ Tese: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

Demonstração. Marquemos (fig. 119) $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$. Tracemos DE.

Pela hipótese: $$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

logo DE é paralela BC (pág. 177, n.º 8) e, pela Lei de Tales, teremos:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Como $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$ (2.º caso) resulta:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Conseqüência. Dois triângulos retângulos que têm os catetos proporcionais são semelhantes.

Terceiro caso:

Dois triângulos que têm os três lados respectivamente proporcionais são semelhantes.

Hip.: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Demonstração. Procedendo como nos casos anteriores temos (fig. 119):

$$AD = A'B' \quad (1)$$
$$DE \parallel BC$$

e $$\triangle ADE \sim \triangle ABC \quad (2)$$

Em virtude da relação (2) podemos concluir:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

ou, de acôrdo com a igualdade (1):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

A primeira das três razões é a mesma que a primeira das três razões da hipótese; logo, as outras razões serão iguais, isto é:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'} \text{ e } \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}$$

donde concluímos:

$$AE = A'C'$$
$$DE = B'C'.$$

Os triângulos ADE e $A'B'C'$ são, pois, congruentes, por terem os três lados iguais (3.º caso). Substituindo em (2) o triângulo ADE por seu igual, temos a tese:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

16. Aplicação. A semelhança de triângulos aplica-se para provar a proporcionalidade de segmentos ou, o que é o mesmo, para demonstrar a igualdade de dois produtos.

O processo consiste em construir triângulos semelhantes que tenham como lados os segmentos que figuram na tese. Exemplo:

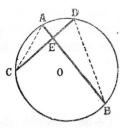



Fig. 120

Demonstrar que duas cordas de um círculo se cortam em partes proporcionais (fig. 120):

Tese: $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$

Tracemos DB e AC. Ficam formados os dois triângulos ACE e BDE, que são semelhantes em virtude do primeiro caso ($B = C$, $A = D$, por terem a mesma medida).

Da semelhança resulta:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{EB}.$$

Daí, a igualdade dos dois produtos:

$$AE \times EB = CE \times DE.$$

17. Semelhança de polígonos. A semelhança de polígonos se baseia num único teorema e sua recíproca.

Teorema.

Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes e igualmente dispostos.

Sejam os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (fig. 121).

Hip.: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

Tese: $\begin{cases} t_1 \sim t'_1 \\ t_2 \sim t'_2 \\ t_3 \sim t'_3 \end{cases}$

Demonstração. Se traçarmos as diagonais de dois vértices homólogos, A e A' por

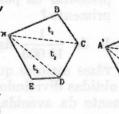



Fig. 121

exemplo, os dois polígonos ficarão decompostos em triângulos.

De acôrdo com a hipótese os polígonos têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais; logo, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \therefore t_1 \sim t'_1 \qquad (1)$$

Da relação (1) concluímos: $BCA = B'C'A'$ e, portanto, $ACD = A'C'D'$, por serem diferenças entre ângulos iguais. Temos, ainda:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

donde concluímos: $t_2 \sim t'_2$ (2)

E, assim, sucessivamente, qualquer que seja o número de triângulos.

Conseqüência. A igualdade $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ demonstra a conseqüência:

Em dois polígonos semelhantes duas diagonais homólogas estão entre si como dois lados homólogos.

Recíproca:

Dois polígonos compostos do mesmo número de triângulos semelhantes e igualmente dispostos, são semelhantes.

Demonstração. Consideremos a mesma figura. Por hipótese, os triângulos t_1, t_2, e t_3 são, respectivamente, semelhantes a t'_1, t'_2 e t'_3; logo, podemos concluir as relações:

De $t_1 \sim t'_1$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$

De $t_2 \sim t'_2$, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{CD}{C'D'}$; $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$, $\hat{D} = \hat{D}'$

De $t_3 \sim t'_3$, $\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$; $\hat{D} = \hat{D}'$, $\hat{E} = \hat{E}'$, $\hat{A} = \hat{A}'$

Suprimindo as relações comuns e somando os três ângulos em A e A' e os dois em C e C' e em D e D', resulta:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'};$$

$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}',\ \hat{D} = \hat{D}',\ \hat{E} = \hat{E}',$$

e os polígonos são semelhantes, pois satisfazem às duas condições.

18. Propriedade dos polígonos semelhantes.

Em dois polígonos semelhantes os perímetros estão entre si como dois lados homólogos quaisquer.

Sejam os polígonos semelhantes $ABCDE$ e $A'B'C'D'E$, (fig. 121).

De acôrdo com a hipótese, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Aplicando a propriedade da soma dos antecedentes, concluímos:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ ou } \frac{2p}{2p'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

19. Aplicação da semelhança de polígonos. A semelhança tem aplicação importante na representação de um objeto, de um terreno, de uma cidade, de uma casa, etc., por meio de um desenho; êsses desenhos são denominados *plantas cartas*, etc.

O desenho obtido é uma figura semelhante ao objeto natural, segundo uma certa razão de semelhança.

Geralmente, nas plantas e cartas, a razão de semelhança é expressa por uma fração de numerador igual à unidade e

recebe o nome particular *escala*. Assim, na planta de um terreno, sendo o comprimento de 20 metros representado por um segmento de 20 centímetros, a razão de semelhança será

$$\frac{0{,}20}{20} \text{ ou } \frac{1}{100}$$

e diz-se que a escala da planta é de $\frac{1}{100}$ (lê-se: *escala de 1 por 100*).

Conhecida a escala de uma planta, é fácil determinar a distância natural correspondente a uma dada do desenho, ou, inversamente, determinar o segmento que deve representar uma distância natural dada. Exemplos:

1.º) Na planta de uma casa na escala de $\frac{1}{50}$ um quarto tem 5cm de largura e 7cm de comprimento. Determinar as dimensões naturais do quarto.

A escala de $\frac{1}{50}$ significa que as dimensões naturais são 50 vêzes maiores que as do desenho e serão portanto obtidas multiplicando-se as do desenho por 50.

Assim, temos:

largura do quarto: $5\text{cm} \times 50 = 250\text{cm} = 2{,}5\text{m}$

comprimento do quarto: $7\text{cm} \times 50 = 350\text{cm} = 3{,}5\text{m}$.

2.º) Ao desenhar a planta de uma cidade na escala de $\frac{1}{10\,000}$, qual o comprimento com que se deve representar na planta uma avenida de 3km de comprimento?

A escala de $\frac{1}{10\,000}$ significa que as dimensões naturais são 10 000 vêzes maiores que as do desenho; logo, estas últimas serão obtidas dividindo-se as naturais por 10 000. Assim, o comprimento da avenida na carta será:

$$3\text{km} : 10\,000 = 0{,}000\,3\text{km} = 30\text{cm}.$$

EXERCÍCIOS

1. Um feixe de quatro paralelas determina sôbre uma transversal três segmentos de 3m, 4m e 5m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe sôbre outra transversal, cujo comprimento total entre as paralelas extremas é de 48m.
Resp.: 12m, 16m e 20m.
2. O segmento AB está dividido harmônicamente pelos pontos M e N. Calcular os três segmentos da divisão e a razão, sendo dados: $AB = 15$cm e o segmento total $BN = 45$cm.
Resp.: $NA = 30$cm; $MA = 6$cm; $MB = 9$cm; razão: $\frac{2}{3}$.
3. Sabendo que dois lados de um triângulo valem, respectivamente, 25,20m e 18,20m e que a paralela ao terceiro lado corta o primeiro a 11,04m do vértice comum, calcular os segmentos em que fica dividido o segundo lado. *Resp.:* 7,98m e 10,22m (aproximadamente).
4. Dado um segmento AB de 12cm, determinar os pontos M e P que o dividem harmônicamente, na razão 2/3.
Resp.: $MB = 7{,}2$cm e $PB = 36$cm.
5. Numa divisão harmônica os dois segmentos aditivos são: $MA = 3$cm e $MB = 7$cm. Calcular os segmentos subtrativos.
Resp.: 7,5cm e 17,5cm.
6. Dado o segmento $AB = 28$cm e tendo-se $MA = 21$cm e $PA = 84$cm pergunta-se: M e P são conjugados harmônicos de AB? *Resp.:* não.
7. Dois lados de um triângulo têm 6m e 8m. Do vértice comum toma-se, sôbre o primeiro lado, um segmento de 4,5m. Qual o segmento a tomar sôbre o segundo lado para que a reta determinada pelos extremos seja paralela ao terceiro lado? *Resp.:* 6m.
8. Os três lados de um triângulo medem, respectivamente, 7m, 8m e 12m. Calcular os segmentos que a bissetriz interna determina sôbre o maior lado. *Resp.:* 6,4m e 5,6m.
9. Os lados a, b, c de um triângulo de perímetro 54m, são respectivamente proporcionais aos números 2, 3 e 4. Pedem-se os segmentos que a bissetriz interna determina sôbre o lado b. *Resp.:* 6m e 12m.
10. Calcular os segmentos subtrativos em que a bissetriz do ângulo externo A' do $\triangle ABC$ divide o lado oposto, sendo $AB = 4$cm, $AC = 6$cm e $BC = 8$cm. *Resp.:* 24cm e 16cm.
11. Dividir um segmento de 5cm em três partes proporcionas a 2,3 e 5.
12. Calcular a quarta proporcional a segmentos de 3 cm, 4 cm e 5cm.
13. Por um ponto D do lado AB de um $\triangle ABC$, e tal que $AD = 3$cm, traçou-se uma paralela a BC. Seja E o ponto de intersecção com o lado AC. Calcular AE e EC, sendo dados: $AB = 5$cm, $AC = 6$cm e $BC = 7$cm. *Resp.:* $AE = 3{,}6$cm e $EC = 2{,}4$cm.

14. Determinar o ponto P do suporte do segmento $AB = 7$cm e exterior ao mesmo segmento, sendo $\frac{AP}{BP} = \frac{4}{7}$.
15. Dividir o segmento AB de 15cm em partes proporcionais a 2, 3 e 5.
16. A bissetriz interna do ângulo A de um triângulo ABC divide o lado oposto BC em dois segmentos de 5cm e 7cm. O lado AB tem 7,5cm. Calcular o lado AC. *Resp.:* 10,5cm.
17. Num triângulo ABC o lado BC tem 6cm. O maior dos segmentos subtrativos em que a bissetriz do ângulo oposto divide êste mesmo lado mede 18cm. Calcular os outros dois lados, sabendo que suas medidas diferem de 4cm. *Resp.:* 8cm e 12cm.
18. Dado um triângulo ABC, cujo perímetro é de 20cm, e onde a bissetriz do ângulo externo A' determina sôbre o prolongamento do lado a dois segmentos subtrativos de 18cm e 14cm, respectivamente; pede-se:
1.º) os valores dos segmentos aditivos determinados no lado a pela bissetriz do ângulo interno A;
2.º) os valores dos lados a, b, c. *Resp.:* 1.º) 1,75cm e 2,25 cm.
2.º) 4cm, 7cm e 9cm.
19. Determinar a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes, sabendo que dois lados homólogos medem respectivamente 51mm e 17mm. *Resp.:* 1/3.
20. Num triângulo os lados medem 6cm, 9cm e 12cm. Qual é o perímetro de um triângulo semelhante e menor que o anterior, sendo a razão de semelhança igual a $\frac{1}{3}$? *Resp.:* 9cm.
21. Num pentágono regular um dos lados mede 12cm. Quanto mede o lado de outro pentágono regular maior, sendo a razão de semelhança $\frac{5}{3}$? *Resp.:* 20cm.
22. O perímetro de um triângulo mede 27cm. Dois dos lados de um triângulo semelhante medem, respectivamente, 4cm e 6cm. Calcular os três lados do primeiro e o terceiro lado, do segundo, sabendo que a razão de semelhança é 3/2. *Resp.:* 6, 9, 12 e 8.
23. As dimensões de um retângulo são respectivamente de 22cm e 18cm. Calcular o perímetro de um retângulo semelhante reduzido sendo 3/5 a razão de semelhança. *Resp.:* 48cm.
24. Dois pentágonos são semelhantes e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é 3/4. Calcular o perímetro do segundo, sabendo que o do primeiro é 27cm. *Rresp.:* 36cm.
25. Dois polígonos são semelhantes e uma das diagonais do primeiro é igual a 2/5 de sua homóloga no segundo. Calcular o perímetro do segundo polígono, sabendo que o do primeiro tem 28cm. *Resp.:* 70cm.

26. Achar os três lados de um triângulo, cujo perímetro é de 36m e que é semelhante a outro cujos lados medem 6m, 9m e 12m.
Resp.: 8m, 12m, 16m.

27. Num $\triangle\ ABC$ tem-se: $a = 8$cm, $b = 12$cm, $c = 16$cm. Em outro triângulo MNP tem-se: $m = 12$cm, $n = 6$cm e $p = 9$cm. Justificar que são semelhantes e dizer quais os ângulos iguais.
Resp.: $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle P$.

28. Os triângulos ABC e MNP são semelhantes e sabe-se que: $\angle A = \angle N$ é $\angle B = \angle P$. Calcular os lados n e p, sendo dados: $a = 7$cm. $b = 5$cm, $c = 10$cm e $m = 16$cm. *Resp.:* $n = 11{,}2$cm e $p = 8$cm.

29. O $\triangle\ ABC$ e o $\triangle\ MNP$ são semelhantes, sendo $\angle A = \angle P$ e $\angle C = \angle M$. Calcular a e n, sabendo que: $b = 24$cm, $c = 20$cm, $m = 8$cm e $p = 4$cm. *Resp.:* $a = 10$cm e $n = 9{,}6$cm.

30. Na planta de uma cidade, na escala de 1/5 000, a distância entre duas praças mede 25cm. Determinar a distância natural entre as praças. *Resp.:* 1 250m.

31. Ao desenhar a planta de um edifício na escala de 1/50, que dimensões devem ser dadas a uma sala de 4,5m por 7m? *Resp.:* 9cm por 14cm.

32. Numa carta do Estado do Rio de Janeiro a distância de 50km entre as cidades de Petrópolis e Vassouras é representada por 5cm. Determinar a escala da carta. *Resp.:* 1/1 000 000.

33. Qual a distância entre as cidades de Goiás e Anápolis, se, numa carta do Estado de Goiás de 1/10 000 000, essa mesma distância é de 1,5cm? *Resp.:* 150km.

34. As bases de um trapézio têm, respectivamente, 25cm e 18cm e a altura, 12,6cm. Calcular as alturas dos triângulos obtidos ao se prolongar os lados não paralelos. *Resp.:* 32,4cm e 45cm.

35. Num trapézio, cujas bases medem, respectivamente, 32cm e 20cm e a altura 6cm, traça-se uma reta paralela às bases, que dista 3,4cm da base menor. Calcular o segmento da paralela compreendido entre os lados não paralelos. *Resp.:* 26,8cm.

36. Num trapézio, cujas bases têm, respectivamente, 32cm e 20cm e altura 18cm, traça-se uma paralela às bases. Calcular o segmento da paralela compreendido entre os lados não paralelos, sabendo-se que é igual ao dôbro de sua distância à base menor. *Resp.:* 30cm.

37. Unem-se os pontos médios dos lados de um triângulo. Achar a razão entre o perímetro do triângulo obtido e o do dado. *Resp.:* 1/2.

38. As bases de um trapézio têm, respectivamente, 4cm e 6cm e a altura, 3cm. Calcular as alturas dos triângulos obtidos prolongando-se os lados não paralelos. *Resp.:* 6cm e 9cm.

39. As bases de um trapézio têm respectivamente, 28cm e 40cm e altura, 12cm. Calcular a que distância da base menor cortam-se os lados não paralelos. *Resp.:* 28cm.

40. Divide-se o lado BC de um trapézio em dois segmentos BF e CF, proporcionais a 3 e 2. Pelo ponto F raça-se EF, paralelo às bases. Calcular EF, sendo: $AB = 38{,}5$m e $CD = 12{,}45$m. (E. Militar, 1937).
Resp.: 22,87m.

41. Calcular o lado do quadrado inscrito num triângulo, cuja base tem 12cm e a altura 8cm. *Resp.:* 4,8cm.

42. Três concorrentes determinam sôbre quatro paralelas os pontos A, B e C na primeira; D, E e F na segunda; G, H e I na terceira; J K e L na quarta. São dados: $AD = 4$; $DG = 6$; $GJ = 8$; $BE = 3$ e $CL = 16{,}2$. Calcular: EH, HK, CF, FI e IL.
Resp.: 4,5; 6; 3,6; 5,4 e 7,2.

43. Qual a altura de uma chaminé, cuja sombra tem 3m no mesmo instante que um bastão de 50cm deita uma sombra de 20cm?
Resp.: 7,5m.

44. Os raios de dois círculos têm, respectivamente, 3m e 7m, e a distância entre os centros é de 15m. Calcular as distâncias de cada centro ao ponto de intersecção da tangente comum interna com a linha dos centros. *Resp.:* 4,5m e 10,5m.

45. Considerando os mesmos círculos do problema anterior, calcular de quanto se deve prolongar a linha dos centros, para que a mesma encontre a tangente comum externa. *Resp.:* 11,25m.

46. Duas circunferências tangentes exteriores têm raios de 5cm e 3cm, respectivamente. De quanto se deve prolongar a distância entre os centros para que a mesma encontre a tangente comum externa?
Resp.: 12cm.

Provar os teoremas:

47. Dois polígonos regulares do mesmo número de lados são semelhantes.

48. As diagonais de um trapézio dividem-se mùtuamente na mesma razão.

49. Sôbre cada um dos lados de um ângulo tomam-se, arbitràriamente os pontos P e Q. De cada um dêsses pontos traçam-se perpendiculares aos lados opostos. Provar que os triângulos formados pelos lados com essas perpendiculares, são semelhantes.

50. BD é mediana do lado AC do triângulo ABC. Traça-se uma paralela a AC, que corte os dois outros lados e a mediana BD. Provar que os segmentos determinados sôbre a paralela são iguais.

UNIDADE IV

Relações trigonométricas. Tábuas naturais

1. Seno de um ângulo agudo. Tracemos um ângulo A e, de vários pontos de um dos lados, M, M', M'', baixemos as perpendiculares MP, $M'P'$, $M''P''$, ao outro lado, como mostra a fig. 122. Ficam assim formados triângulos retângulos semelhantes e concluímos as igualdades:

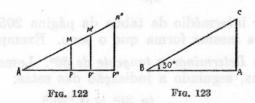
$$\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'} = \frac{M''P''}{AM''}.$$

Assim, o ângulo A fornece uma razão constante entre o cateto oposto e a hipotenusa, de modo que, para cada valor do ângulo A, a razão tem um valor fixo.

A esta razão dá-se o nome ***seno do ângulo** A* e abrevia-se: ***sen** A*. Temos, então:

$\text{sen } A = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$	ou	**Seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.**

2. Determinação gráfica do valor do seno. Seja determinar o valor do seno de 30°.

Fig. 122 Fig. 123

Construindo um ângulo de 30° (fig. 123), tomemos sôbre um dos lados o segmento BC de comprimento arbitrário, 4cm

por exemplo, e do ponto C baixemos a perpendicular CA ao outro lado. Medindo CA encontramos 2cm e concluímos, de acôrdo com a definição de seno:

$$\text{sen } 30° = \frac{CA}{BC} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

3. Uso da tabela de senos. Na tábua da página 205 encontramos nas duas colunas extremas os ângulos de grau em grau, de 0° a 45° na da esquerda e, de 45° a 90°, na da direita. Para ler o valor do seno de um ângulo menor que 45° procuramos o ângulo na primeira coluna e o nome *seno* ao alto da página.

À direita do valor do arco leremos o valor do seno. Ao contrário, se o ângulo é maior que 45°, procuramo-lo na última coluna e o valor do *seno* na coluna que tem o seu nome em baixo, como indicam as setas. Exemplos:

1.°) *Achar o seno de 60°.* O ângulo é maior que 45°, procuramos seu valor na última coluna e a palavra *seno* em baixo. Leremos no cruzamento:

$$\text{sen } 60° = 0{,}866\,0$$

2.°) *Achar o seno de 38°26'.* O ângulo está compreendido entre os de 38° e 39° da primeira coluna, cujos senos são:

$$\text{sen } 38° = 0{,}615\,7$$
$$\text{sen } 39° = 0{,}629\,3.$$

A diferença entre êsses valores é de 136 décimos milésimos. Concluímos então que, quando o ângulo aumenta um grau ou sessenta minutos, o seno aumenta 136 décimos milésimos, logo, o aumento para 26' será obtido pela regra de três:

para 60' aumenta 136 décimos milésimos
para 26' aumentará x décimos milésimos

donde: $x = \dfrac{26 \times 136}{60} = 59$ décimos milésimos aproximadamente.

Na prática emprega-se o dispositivo:

$$\begin{array}{ll} \text{sen } 38^\circ & = 0{,}615\,7 \\ \underline{\text{para } 26' \quad \ldots} & \underline{\quad\;\; 5\,9} \\ \text{sen } 38^\circ 26' & = 0{,}621\,6 \end{array}$$

4. Emprêgo do seno. Exemplos:

1.º) Para medir a altura de um penedo, onde era inaplicável o fio de prumo, como mostra a figura 124, foi esticada uma corda de 35m de B a C, medindo o ângulo C da corda com o terreno encontrou-se 43°. Determinar a altura do penedo.

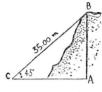



FIG. 124

FIG. 125

A altura AB é o cateto oposto ao ângulo de 43°. Da definição de seno, concluímos:

$$\text{sen } 43^\circ = \frac{AB}{BC}$$

BC tem 35m e procurando na tábua o seno de 43° encontramos:

$$\text{sen } 43^\circ = 0{,}682\,0,$$

assim, obtemos indiretamente a altura:

$$AB = 35 \times 0{,}682\,0 = 23{,}87\text{m}.$$

2.º) Num triângulo retângulo um cateto tem 5,70m e o ângulo agudo oposto mede 52°. Determinar a hipotenusa.

Sejam b o cateto e B o ângulo oposto dados (fig. 125).

Temos, por definição: $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a}$

donde $$b = a \text{ sen } \hat{B}$$

e $$a = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

A tábua fornece o valor: sen 52° = 0,788 0. Assim:

$$a = \frac{5{,}70}{0{,}788\,0} = 7{,}23\text{m aproximadamente.}$$

5. Tangente. Considerando os triângulos retângulos semelhantes da figura 122, concluímos:

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P}{AP'} = \frac{M''P''}{AP''}.$$

A razão entre o cateto oposto ao ângulo A e o cateto adjacente é constante, enquanto o ângulo A permanecer fixo; esta razão denomina-se ***tangente do ângulo* A** e abrevia-se: ***tg* A.**

Definição:

> **Em um triângulo retângulo chama-se tangente de um ângulo agudo a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.**

6. Determinação da tangente de um ângulo agudo. Seja determinar a tangente de 30°.

Construindo um triângulo retângulo com um ângulo de 30° como o da figura 123, por exemplo, medimos o cateto oposto CA e o adjacente AB, encontramos, respectivamente, os valores aproximados 2 e 3,5cm, concluímos:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{2}{3{,}5} = 0{,}57 \text{ aproximadamente.}$$

Por intermédio da tábua da página 205 lemos uma tangente da mesma forma que o seno. Exemplos:

1.º) *Determinar a tangente de 36°.* Lemos imediatamente na tábua, seguindo a indicação das setas:

$$\text{tg } 36^\circ = 0{,}726\,5.$$

2.º) *Determinar a tangente de 58°30'.* Usando o dispositivo prático indicado para o seno, temos:

tg 58°	= 1,600 3	60′ – 640
para 30′	320	30′ – x ∴ $x = \frac{640 \times 30}{60} = 320.$
tg 58°30′	= 1,632 3	

7. Emprêgo da tangente. Exemplos:

1.°) Suponhamos que queremos medir a altura de um poste (fig. 126).

Afastando-nos do poste de uma distância AB de 20 metros por exemplo, admitamos que conseguimos ler no instrumento muito simples construído com um transferidor e uma régua, um ângulo de elevação de 32°, como mostra a figura.

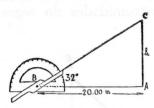



FIG. 126

De acôrdo com a definição de tangente, teremos:

$$\text{tg } 32° = \frac{h}{AB}$$

donde; $h = AB.\ \text{tg } 32°$ ou $h = 20\ \text{tg } 32°$.

Usando a tábua encontraremos:

$$\text{tg } 32° = 0{,}624\,9$$

e, portanto, $\quad h = 20 \times 0{,}624\,9 = 12{,}498\text{m}.$

2.°) Num triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 52° mede 5,70m. Determinar o outro cateto.

Por definição de tangente temos (fig. 125):

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

donde, $$b = c\ .\ \text{tg } \hat{B}$$

e $$c = \frac{b}{\text{tg}\hat{B}}.$$

Utilizando a tábua encontramos:

$$c = \frac{5{,}70}{1{,}279\,9} = 4{,}45\text{m}.$$

8. Co-seno. Considerando os triângulos da fig. 122, concluímos:

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AP'}{AM'} = \frac{AP''}{AM''}.$$

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo A e a hipotenusa é constante, enquanto o ângulo A permanecer fixo; esta razão denomina-se ***co-seno do ângulo* A** e abrevia-se: ***cos* A.**

Definição:

> **Co-seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente a êsse ângulo e a hipotenusa.**

9. Uso da tábua. A leitura do co-seno na tábua se faz como a das outras linhas, exceto para o caso dos ângulos intermediários. Exemplos:

1.°) *Determinar o co-seno de 65°.* A leitura faz-se imediatamente na tábua: cos 65° = 0,422 6.

2.°) *Determinar o co-seno de 38°25′.* Observemos na tábua que, quando o ângulo aumenta, o co-seno diminui. Assim, temos, usando o dispositivo indicado:

cos 38°	= 0,788 0	60′ –9
		25′ x
para 25′	–4	∴ $x = \frac{-9 \times 25}{60} = -3{,}75$ ou ap. – 4.
cos 38°25′	= 0,787 6	

A parte proporcional do co-seno é negativa.

10. Emprêgo do co-seno. Exemplos:

1.°) *Determinar o cateto c do triângulo da figura 125, sabendo que a hipotenusa tem 7,23m e o ângulo agudo B mede 52°.* Da definição de co-seno concluímos:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

donde: $\quad c = a\ .\ \cos \hat{B}.$

A tábua fornece o valor: cos 52° = 0,615 7. Como a = 7,23m, concluímos:

$$c = 7{,}23 \times 0{,}615\,7$$
$$c = 4{,}45\text{m aproximadamente.}$$

2.°) *Determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo em que o cateto adjacente a um ângulo de 56° mede 4,5 m.*

Representando a hipotenusa por x, temos de acôrdo com a definição de co-seno:

$$\cos 56° = \frac{4{,}5}{x}$$

donde,

$$x = \frac{4{,}5}{\cos 56°}.$$

Determinando pela tábua o valor do co-seno e substituindo, obtemos

$$x = \frac{4{,}5}{0{,}559\,2} = 8{,}05 \text{ aproximadamente.}$$

11. Emprêgo da tábua na determinação de um ângulo. A tábua da página 205 é também empregada na determinação de um ângulo de que se conhece o seno, o co-seno ou a tangente. Exemplos:

1.°) *Determinar o ângulo* a *sendo tg* a = *0,674 5.* Procurando nas colunas de tangentes o número 0,674 5, verificamos que a êle corresponde o ângulo de 34°; concluímos:

$$a = 34°.$$

2.°) *Determinar o ângulo* a *sendo sen* a = 0,605 6. Verificamos que o número 0,606 5 não figura na tabela, ficando no tanto compreendido entre 0,601 8 e 0,615 7; assim concluímos estar o ângulo procurado compreendido entre 37° e 38°. Por outro lado verificamos que ao aumento de 1° ou 60′ no ângulo corresponde um aumento de 0,013 9 no seno e como o aumento de 0,601 8, que corresponde a 37°, para 0,606 5 é de 0,004 7, podemos estabelecer a regra de três:

se a 139 décimos milésimos correspondem 60′
a 47 décimos milésimos corresponderão x'

donde concluímos:

$$x' = \frac{47 \times 60}{139} = \frac{2\,820}{139} = 20' \text{ aproximadamente.}$$

Sendo de 20′ o excesso do ângulo procurado sôbre 37°, temos, finalmente:

$$a = 37°20'.$$

12. Projeção de um segmento. Chama-se *projeção* de um segmento sôbre um eixo, o segmento do eixo que se obtém baixando as perpendiculares das extremidades do segmento

FIG. 127

sôbre o eixo. Assim, na figura 127, ab é a projeção do segmento AB sôbre o eixo XY e Ce a de CE.

13. Cálculo da projeção. Suponhamos o segmento AB (fig. 128) e ab sua projeção sôbre o eixo XY.

FIG. 128

Considerando o triângulo retângulo ADB podemos concluir:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AB}$$

donde: $AD = AB \,.\, \cos \alpha.$

Como AD é igual à projeção ab:

$$\boxed{ab = AB \,.\, \cos \alpha}$$

isto é:

A projeção de um segmento sôbre um eixo é igual ao produto da medida do segmento pelo co-seno do ângulo que forma com o eixo.

Exemplo: *Calcular a projeção de um segmento de 5cm sôbre um eixo que forma com o mesmo um ângulo de 30°.* Seja x a projeção procurada. Teremos:

$$x = 5 \,.\, \cos 30°.$$

A tabela de co-senos dá: $\cos 30° = 0{,}866\,0$.

Fazendo a substituição: $x = 5 \times 0{,}866\,0 = 4{,}33$m.

EXERCÍCIOS

1. Determinar, por intermédio da tábua da página 205, as tangentes dos ângulos de 63°, 45° e 28°36′. *Resp.:* 1,962 6, 1 e 0,533 3.
2. Determinar os senos dos ângulos 58°28′, 36° e 12°48′. *Resp.:* 0,852 3; 0,587 8 e 0,221 6.
3. Determinar os co-senos dos ângulos de 61°, 27°15′ e 41°12′. *Resp.:* 0,484 8; 0,889 0 e 0,752 4.

Resolver o triângulo retângulo da figura 125 nos seguintes casos:

4. Sendo $a = 10$m e $B = 43°$, determinar b, c e C. *Resp.:* $b = 6{,}82$, $c = 7{,}31$, $C = 47°$.
5. Sendo $b = 8$m e $B = 56°10'$, determinar a, c e C. *Resp.:* $a = 9{,}63$, $c = 5{,}36$, $C = 33°50'$.

6. Sendo $a = 42$m e $b = 21$, determinar B, C e c. *Resp.:* $B = 30°$, $C = 60°$, $c = 36{,}37$.
7. Sendo $b = 56{,}15$ e $c = 25$, determinar B, C e a. *Resp.:* $B = 66°$, $C = 24°$, $a = 61{,}46$.

Resolver os problemas:

8. Uma escada, apoiada sôbre um muro vertical, forma com êle um ângulo de 30°. O pé da escada fica a 2,5m do muro. A que altura do muro atinge a escada e qual seu comprimento? *Resp.:* 4,33m e 5m.
9. O ângulo do vértice de um triângulo isósceles tem 48°40′ e a altura 25dm. Calcular os lados e a base. *Resp.:* 27,43 e 22,61.
10. Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm 38° cada um e o lado, 10dm. Calcular o ângulo do vértice, a base e a altura.
11. Num triângulo retângulo a hipotenusa tem 58m e um dos ângulos agudos tem 38°30′. Calcular os catetos e o outro ângulo agudo.
12. Um dos catetos de um triângulo retângulo tem 28m e o ângulo agudo oposto tem 44°18′. Calcular os outros elementos do triângulo. *Resp.:* 19, 5, 35°42′ e 40,2m.
13. Num triângulo retângulo, a hipotenusa tem 108dm e um dos catetos tem 36dm. Calcular o outro cateto e os ângulos do triângulo. *Resp.:* 19°28′ 102,2dm.
14. Os catetos de um triângulo retângulo têm, respectivamente, 35dm e 48dm. Calcular os ângulos e a hipotenusa do triângulo.
15. Achar na tábua (aproximadamente até minutos) os ângulos, cujos co-senos são: *a)* 0,353 0; *b)* 0,865 4; *c)* 0,102 4. *Resp.:* *a)* 69°20′; *b)* 30°30′; *c)* 84°8′.
16. Achar na tábua, aproximadamente, os ângulos cujos senos valem: *a)* 0,765 4; *b)* 0,277 6; *c)* 0,483 4. *Resp.:* *a)* 49°56′; *b)* 16°7′; *c)* 28°54′.
17. Achar na tábua os ângulos, cujas tangentes valem: *a)* 2,567 8; *b)* 0,387 4; *c)* 1,534 8. *Resp.:* *a)* 68°42′ *b)* 21°10′; *c)* 56°55′.
18. Num triângulo retângulo a hipotenusa tem 5m e um dos catetos, 4m. Calcular os ângulos agudos e o outro cateto do triângulo. *Resp.:* 3m, 36°52′ e 53°8′.
19. Num círculo de raio igual a 4,6dm, calcular o comprimento de uma corda que subtende um arco de 38°. *Resp.:* 1,49dm.
20. A base de um retângulo tem 6,4cm e forma com a diagonal um ângulo de 38°. Calcular a altura e a diagonal do retângulo. *Resp.:* 5cm.
21. Uma corda de 3dm forma com o diâmetro traçado de sua extremidade um ângulo de 36°. Calcular o raio do círculo. *Resp.:* 1,8dm.

Resolver um triângulo retângulo ABC, sendo dados os elementos:

22. $a = 20$m e $B = 26°10'$.
23. $b = 50$dm e $C = 47°30'$.
24. $a = 5{,}8$dm e $c = 2{,}5$dm.
25. $a = 0{,}80$m e $b = 0{,}20$m.

TÁBUA DE SENOS, CO-SENOS E TANGENTES

DE 0° A 45° TÍTULOS ACIMA

GRAUS	SENO	CO-SENO	TANGENTE		
0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90
1	0175	0,9998	0175	57,2900	89
2	0349	9994	0349	28,6363	88
3	0523	9986	0524	19,0811	87
4	0698	9976	0699	14,3007	86
5	0872	9962	0875	11,4301	85
6	1045	9945	1051	9,5144	84
7	1219	9925	1228	8,1444	83
8	1392	9903	1405	7,1154	82
9	1564	9877	1584	6,3138	81
10	1736	9848	1763	5,6713	80
11	1908	9816	1944	5,1446	79
12	2079	9781	2126	4,7046	78
13	2250	9744	2309	4,3315	77
14	2419	9703	2493	4,0108	76
15	2588	9659	2679	3,7321	75
16	2756	9613	2867	3,4874	74
17	2924	9563	3057	3,2709	73
18	3090	9511	3249	3,0777	72
19	3256	9455	3443	2,9042	71
20	3420	9397	3640	2,7475	70
21	3584	9336	3839	2,6051	69
22	3746	9272	4040	2,4751	68
23	3907	9205	4245	2,3559	67
24	4067	9135	4452	2,2460	66
25	4226	9063	4663	2,1445	65
26	4384	8988	4877	2,0503	64
27	4540	8910	5095	1,9626	63
28	4695	8829	5317	1,8807	62
29	4848	8746	5543	1,8040	61
30	5000	8660	5774	1,7321	60
31	5150	8572	6009	1,6643	59
32	5299	8480	6249	1,6003	58
33	5446	8387	6494	1,5399	57
34	5592	8290	6745	1,4826	56
35	5736	8192	7002	1,4281	55
36	5878	8090	7265	1,3764	54
37	6018	7986	7536	1,3270	53
38	6157	7880	7813	1,2799	52
39	6293	7771	8098	1,2349	51
40	6428	7660	8391	1,1918	50
41	6561	7547	8693	1,1504	49
42	6691	7431	9004	1,1106	48
43	6820	7314	9325	1,0724	47
44	6947	7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	CO-SENO	SENO		TANGENTE	GRAUS

DE 45° A 90° TÍTULOS ABAIXO